

あみだくじで数学2 ～あみだくじに共通する誘導部分グラフの発見～ A Study of Common Induced Subgraphs between Cayley Graphs of Symmetric Groups

窪田 瑛仁
KUBOTA Eito

It is the structures of the symmetric groups that we have been interested in and have studied for two years. In this research, let a map f to be the isomorphic map from set S_n to set U_x which contains all the maps fixing x and let $Cay(S_n, T)$ to be the Cayley graph of group S_n induced by the generative set T , here we show the sufficient condition stating that if T_2 is equal to $f(T_1) \cup W$, the union of the set $f(T_1)$ and the subset of $(S_{n+1} - U_x)$, then there is an induced subgraph of $Cay(S_{n+1}, T_2)$ which is isomorphic to $Cay(S_n, T_1)$. I think that this condition can be applied to the fields such as Mathematics, Physics, and Chemistry.

1. はじめに

私は身近なあみだくじを数学的対象として扱うことが可能であること、そしてあみだくじが成す群（群については「3. 定義」を参照）の構造、特にケイリーグラフと呼ばれるグラフ構造を用いた群の構造の可視化に興味を持ち、高校1年次から研究を行った。

一見あみだくじは数学と無関係に思われるが、あみだくじを数字の置換とみなすことで、あみだくじの集合およびあみだくじをつなぐ演算を定義でき、それらは群を成すことが分かっている。

このあみだくじが成す群は一般に対称群と呼ばれる群と同型である。この対称群とは数学において、ガロアの第一論文で示された代数方程式の代数的可解性についての必要十分条件の証明に用いられるなど、非常に重要な役割を果たしている。

また、対称群は「群の性質」の調査において持ち出されることがある。ケイリーの定理で「任意の有限群は対称群またはその部分群に同型である」ことが示されており、未知の有限群の性質を調べる際にこの定理から対称群が利用される。

このように様々な分野で応用される対称群について、書籍「数学ガール/ガロア理論」²⁾では3次の対称群 S_3 と4次の対称群 S_4 のケイリーグラフの構造について議論がなされている。

高校1年次の先行研究では、書籍「数学ガール/ガロア理論」での議論に基づいて群 S_4 について研究を行い、「群 S_3 のケイリーグラフと同型である構造が、群 S_4 のケイリーグラフに誘導部分グラフとして見られる」という興味深い性質を観察した。

高校2年次からは、ケイリーグラフの構造に関連するケイリーグラフの生成系に注目し、

- ① 2つのケイリーグラフが共通する構造（誘導部分グラフ）を持つための十分条件を群 S_3 と群 S_4 について導くこと
 - ② ①で証明した十分条件を群 S_n と群 S_{n+1} の間に成り立つ十分条件に拡張すること
- これら2つの目的のもとで研究を行った。

2. 方法

- ① いくつかの生成系をもとに S_3 と S_4 のケイリーグラフを生成する。それらの構造を比較する。比較をもとに導出する十分条件について予想を立てる
- ② 立てた予想を、群 S_3 と群 S_4 について証明する。
- ③ 2. で証明した定理を群 S_n と群 S_{n+1} について拡張し証明する。

3. 定義

はじめに本研究に関連する語句を定義する。

・あみだくじ

本研究において、あみだくじは「数字の並びを変換する写像を視覚化したもの」と定義し、複数の縦棒およびそれらをつなぐ横棒で構成されるものとする。

これより、縦棒 n 本のあみだくじの集合 S_n およびその要素（以下、あみだくじの「元」と表記する）を次のように表記することにする。（図1参照）

あみだくじの定義①

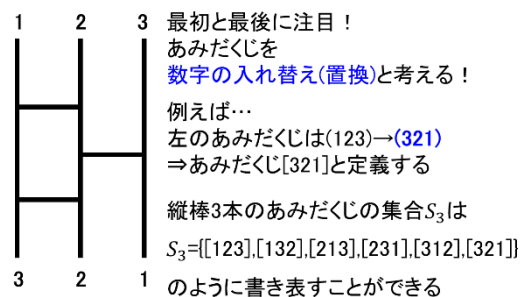


図.1 あみだくじの集合およびその要素（元）の定義

例えば、縦棒3本のあみだくじ S_3 の元は6種類あり、それぞれの元に次のようにあみだくじを対応させることができる。（図.2参照）

あみだくじの定義②

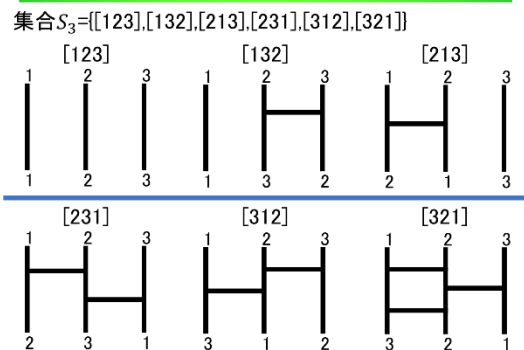


図.2 あみだくじとその元の対応関係

・演算*（あみだくじの合成）

ここであみだくじの合成を定義し、各元同士の関係を定式化する。

集合 S_n に属する2つのあみだくじ a, b について、あみだくじ a の下にあみだくじ b を合成したあみだくじを「 $a * b$ 」と表記することにする。各元 $a, b, a * b$ と実際にあみだくじの対応関係は以下の図の通りになる。(図.3 参照)

あみだくじの定義③

群に必要な演算は？

あみだくじを繋ぐ演算*

$a * b$

⇒あみだくじ a の下にあみだくじ b を繋ぐ

例えば…

$[213] * [231] = [132]$

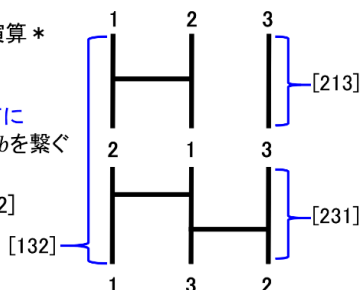


図.3 あみだくじの合成と各元の対応関係

また、これよりあみだくじの集合 S_n は演算*について群を成すことが導かれる。

群

前述の群とは、ある集合 S とその集合に対して定義された演算*が、以下の4つの公理(図.4 参照)を満たすとき、その集合 S および演算*を「群」と定義する。

群の定義

群の公理: 以下の公理を満たす集合を群と呼ぶ

G1. 演算*に関して閉じている

$\langle a, b \in G \Rightarrow a * b \in G \text{ が成り立つ} \rangle$

G2. 任意の元 a, b, c に対して結合法則が成り立つ

$\langle (a * b) * c = a * (b * c) \text{ が成り立つ} \rangle$

G3. 単位元 e が存在する

$\langle a * e = e * a = a \text{ が成り立つ元} e \text{ が存在する} \rangle$

G4. 任意の元 a に対して、逆元 b が存在する

$\langle a * b = b * a = e \text{ が成り立つ元} b \text{ が存在する} \rangle$

図.4 群の公理

あみだくじの集合 S_n と演算*については以下のように群であることを示すことができる。具体例として、ここでは集合 S_4 を用いているが、この議論は集合 S_n においても同様に成り立つ。(図.5 および図.6 参照)

あみだくじの集合は群を成す? ①

群の公理と比較: S_4 (縦棒4本のあみだくじ)

G1. 演算*と閉性

⇒あみだくじを繋いでも同じ本数のあみだくじのまま

G2. 結合法則

⇒演算を行う順序を変えても結果は変化しない

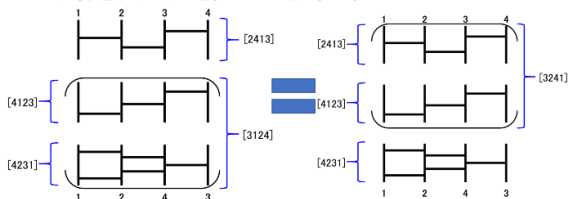


図.5 集合 S_4 , 演算*と群の公理との比較①

あみだくじの集合は群を成す? ②

群の公理と比較: S_4 (縦棒4本のあみだくじ)

G3. 単位元の存在

⇒あみだくじ[1234]を繋いでもそのあみだくじは変化しない

例) $[2314] * [1234] = [1234] * [2314] = [2314]$

G4. 逆元の存在

⇒全てのあみだくじについて

[1234]に置換させるあみだくじが存在する

例) $[2314] * [3124] = [3124] * [2314] = [1234]$

集合 S_4 は演算*について群を成す!

図.6 集合 S_4 , 演算*と群の公理との比較②

以下「縦棒 n 本のあみだくじが成す集合 S_n と演算*が成す群」を「群 S_n 」と略記する。

ケイリーグラフ

以上のように群 S_n を定義すると、群 S_n に含まれる部分集合をもとに、群 S_n の元と元との関係を表現することができる。

その関係性を頂点および有向辺(矢印)でグラフとして表現したものを「ケイリーグラフ」と呼ばれる。(図.7 参照)

ケイリーグラフの定義

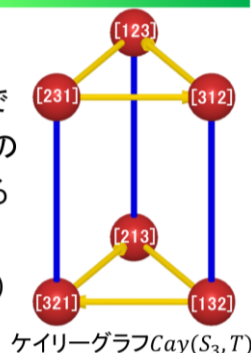
ケイリーグラフ

・頂点と有向辺(矢印)で群の関係を表現したもの

・ $Cay(S_n, T)$ と表記する

例) $Cay(S_3, T)$

$(T = \{[213], [231]\})$



ケイリーグラフ $Cay(S_3, T)$

図.7 ケイリーグラフの定義とその例

ケイリーグラフの生成にあたって、関係を表現するために用いる部分集合を用意する必要がある。その部分集合を、ケイリーグラフの「生成系」と定義する。

この生成系の取り方によって表現できるケイリーグラフの形が大きく変わってくる。

本研究において、群 S_n および生成系 $T \subseteq S_n$ から生成されるケイリーグラフを $Cay(S_n, T)$ と表記する。

部分グラフ, 誘導部分グラフ

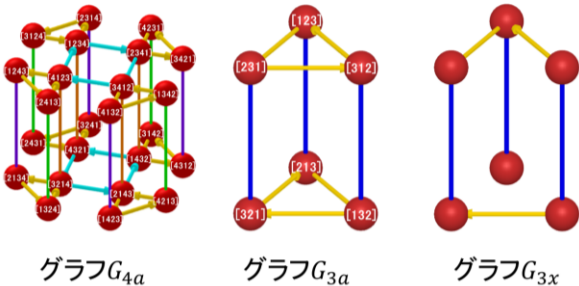
2つのケイリーグラフ $Cay(S_n, T_1)$ と $Cay(S_{n+1}, T_2)$ の構造について、共通する構造を定義する。

一般にグラフ G はその頂点集合 $V(G) := \{v_1, v_2, \dots, v_k | k \in \mathbb{N}\}$ および辺集合 $E(G) := \{\{v_p, v_q\} | \forall p, q \leq k\}$ から構成される。

2つのグラフ G, H について、 $V(H) \subset V(G) \wedge E(H) \subset E(G)$ を満たすならば、グラフ H はグラフ G の部分グラフであるという。

また、グラフ G の部分グラフであるグラフ H について、 $E(H) = \{ \{v, w\} \in E(G) | v \in V(H), w \in V(H) \}$ を満たすとき、グラフ H はグラフ G の誘導部分グラフであるという。(図.8 参照)

部分グラフ・誘導部分グラフの定義



- G_{3a} は G_{4a} の誘導部分グラフである
 - G_{3x} は G_{3a} の部分グラフ(×誘導部分グラフ)である
- 図.8 部分グラフ・誘導部分グラフの定義, 例示

例として、図.8で示すように、グラフ G_{4a} について、 G_{3a} は誘導部分グラフであるが、グラフ G_{3a} について、グラフ G_{3x} は部分グラフであるが、誘導部分グラフではない。

・グラフ同型

直感的には、2つのグラフ G, H について、 G の頂点を、頂点と辺の接続関係を変えずに、 H の頂点に対応できるならば、2つのグラフ G, H は同型であるという。

数学的には2つのグラフ G, H についてある全単射 $f: V(G) \rightarrow V(H)$ が存在し、以下の条件を満たすならば、2つのグラフ G, H は同型であるという。(図.9 参照)

$$\{v_p, v_q\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(v_p), f(v_q)\} \in E(H)$$

グラフ同型

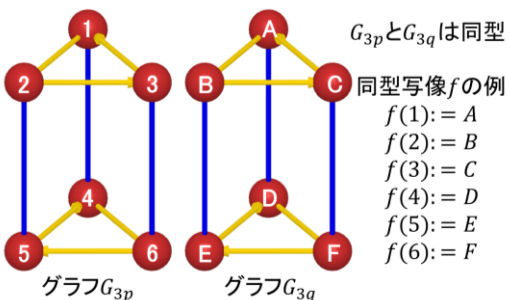


図.9 同型である2つのグラフとその同型写像

例えば図.9で示した2つのグラフ G_{3p}, G_{3q} は同型であり、2つのグラフ間の同型写像の1つは図.9のように定義することができる。

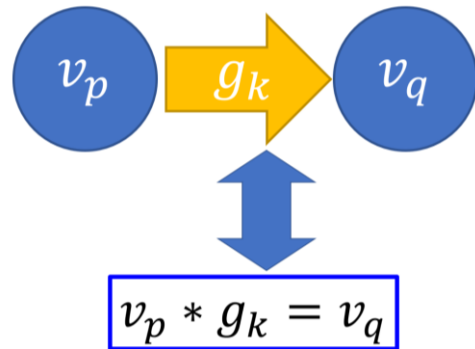
・有向辺の接続条件

今回「あるケイリーグラフが別のケイリーグラフの誘導部分グラフであるか」を議論する際に「対応する頂点から頂点に有向辺が接続するか」という観点から証明を行う。

前述の定義によれば、ケイリーグラフにおける有向辺の接続は2頂点に対応する群 S_n の2元 v_p, v_q および頂点 v_p か

ら v_q に向かう有向辺に対応する、生成系 T に含まれる元 g_k を用いて図.10のように表現できる。(図.10 参照)

有向辺の接続条件



ケイリーグラフ⇔数式(群論)への変換!

図.10 有向辺の接続と数式の対応関係

これより、2つの頂点 v_p, v_q について、頂点 v_p から頂点 v_q に有向辺が接続する必要十分条件は、図.10で示した式を変形して、 $v_p^{-1} * v_q = g_k \in T$ と示すことができる。ただし v_p^{-1} は群 S_n の元 v_p の逆元とする。

4. 予想

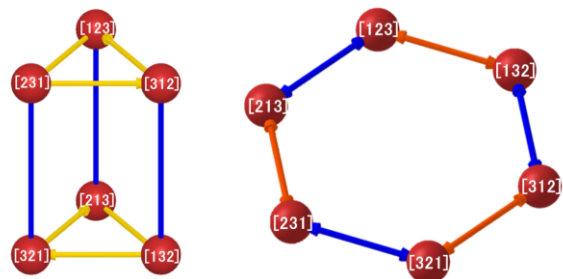
まず本研究で証明すべき命題を明らかにするため、「2.方法」の①に沿って予想を立てる。

2つのケイリーグラフ $Cay(S_3, A)$, $Cay(S_4, B)$ について、生成系の取り方によって以下に示すケイリーグラフが生成される。ここでは例として $|A| = 2$, $|B| = 3$ の場合を示す。

・群 S_3 のケイリーグラフについて

$|A| = 2$ において $Cay(S_3, A)$ は次の2種類のケイリーグラフ G_{3a}, G_{3b} およびこの2つのケイリーグラフのいずれかに同型なケイリーグラフが生成される。(図.11 参照)

$Cay(S_3, A)$ の構造について



$$G_{3a} = Cay(S_3, A_1) \quad G_{3b} = Cay(S_3, A_2)$$

$$A_1 = \{ [231], [213] \} \quad A_2 = \{ [132], [213] \}$$

図.11 $Cay(S_3, A)$ の2種類の構造

このように、 $|A| = 2$ において、 $Cay(S_3, A)$ はいわゆる三角柱型と六角形型を取ることが分かる。

・群 S_4 のケイリーグラフについて

先に示した六角形型のケイリーグラフ G_{3a} と同型なグラフを誘導部分グラフに持つケイリーグラフ $Cay(S_4, B)$ を考える。

このようなケイリーグラフ $Cay(S_4, B)$ は以下に示す 3 種類のケイリーグラフ G_{4a}, G_{4b}, G_{4c} およびこの 3 つのケイリーグラフに同型なケイリーグラフが生成される。ただしそれぞれのケイリーグラフについて、グラフ G_{3a} と同型な誘導部分グラフの 1 つを赤で着色して示している。(図.12 参照)

$Cay(S_4, B)$ の構造について

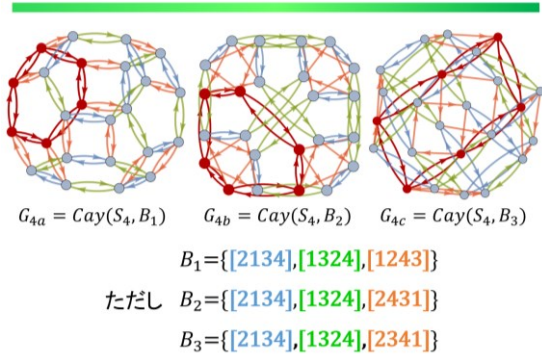


図.12 $Cay(S_4, B)$ の 3 種類の構造

• G_3 と G_4 の比較

ここでグラフ G_{3a} の生成系 A_1 と、グラフ G_{4a}, G_{4b}, G_{4c} の生成系 B_1, B_2, B_3 を比較してみる。

生成系 A_1 に含まれる元 $[213], [132]$ は、生成系 B_1, B_2, B_3 に含まれる元 $[2134], [1324]$ と、置換としてそれぞれ等しい(元 $[213], [2134]$ と元 $[132], [1324]$ は置換によって位置が変わる数字, 変化先がそれぞれ等しい) ことが分かる。

この他に、グラフ G_{3b} と同型な誘導部分グラフを持つように、グラフ G_4 を定めた時も同様に、それぞれの生成系に置換として等しい元を含んでいることが分かった。

このことより、以下の予想を導いた。

予想: n 次対称群 S_n から生成されるケイリーグラフ $Cay(S_n, T_1)$ と $n+1$ 次対称群 S_{n+1} から生成されるケイリーグラフ $Cay(S_{n+1}, T_2)$ について、ある同型写像 $f: S_n \rightarrow U_x$ が存在し、 $f(T_1) \subset T_2$ を満たすならば、 $Cay(S_n, T_1)$ と同型である $Cay(S_{n+1}, T_2)$ の誘導部分グラフが少なくとも 1 つ存在する。

ただし、集合 U_x は集合 S_{n+1} の部分集合で、集合 S_{n+1} が持つ置換のうち、自然数 x を固定する置換を含む部分集合と定義する。

5. 証明

先に示した予想について、「2. 方法」の②, ③に沿って証明を行う。

ここで実際に証明する命題は以下の 2 つである。

①任意の $Cay(S_n, T_1)$ を定めたとき、 $Cay(S_n, T_1)$ と同型である $Cay(S_{n+1}, T_2)$ の誘導部分グラフが存在する。

② $Cay(S_{n+1}, T_2)$ のある誘導部分グラフが $Cay(S_n, T_1)$ と同型である。

A. 3 次対称群 S_3 と 4 次対称群 S_4 について

先に示した命題の、 $n=3$ についての証明を行う。

<命題①-A の証明>

群 S_3, S_4 およびそれぞれの生成系 T_1, T_2 を次のように定める。

$$S_3 = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$$

$$S_4 = \{V_1, V_2, \dots, V_{24}\}$$

$$T_1 = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \quad \text{ただし } k \text{ は } 6 \text{ 以下の自然数}$$

$$T_2 = \{h_1, h_2, \dots, h_l\} \quad \text{ただし } l \text{ は } 24 \text{ 以下の自然数}$$

これらは集合として $S_3 \supseteq T_1, S_4 \supseteq T_2$ であり、 $f(T_1) \subset T_2$ より任意の g_m が $f(g_m) = h_m \in T_2$ を満たすように置く。

$Cay(S_3, T_1)$ 上の任意の 2 頂点 v_p, v_q について、頂点 v_p から頂点 v_q に有向辺が接続するならば、

$$v_p^{-1} * v_q = g_m \in T_1 \quad (1)$$

を満たす。

(1)式について、写像 f を適用すると

$$f(v_p^{-1} * v_q) = f(g_m)$$

群, 生成系の定義, 写像 f が同型写像であることから

$$f(v_p^{-1}) * f(v_q) = f(g_m) \\ V_p^{-1} * V_q = h_m \in T_2 \quad (2)$$

が導かれる。

(2)式より、有向辺の接続条件から $Cay(S_4, T_2)$ 上の 2 頂点 V_p, V_q について、頂点 V_p から頂点 V_q に有向辺が接続することが示された。

よって $Cay(S_3, T_1)$ 上の有向辺が接続する任意の 2 頂点について、対応する 2 頂点が $Cay(S_4, T_2)$ 上に存在し、それらが有向辺で接続されることが示され、命題①-A 「任意の $Cay(S_3, T_1)$ を定めたとき、 $Cay(S_3, T_1)$ と同型である $Cay(S_4, T_2)$ の誘導部分グラフが存在する」は示された。

例) 同型写像 $f: S_3 \rightarrow U_4$ を、任意の元 $[abc] \in S_3$ において $f([abc]) = [abc4]$ を満たすように定義する。

$T_1 = \{[213], [231]\}$ とすると、生成系 T_2 の定義より、 $T_2 \ni (f([213]), f([231])) = ([2134], [2314])$ である。

頂点 $[231], [321]$ について

$$[231]^{-1} * [321] = [213] \in T_1$$

であることから、

$$f([231]^{-1}) * f([321]) = f([213])$$

$$\therefore [2314]^{-1} * [3214] = [2134] \in T_2$$

と導かれる。

<命題②-A の証明>

群 S_4 の部分群 U_4 と生成系 $T'_2 = \{h_1, h_2, \dots, h_j | 1 \leq j \leq 6\} \subset U_4 \wedge T'_2 \subset T_2$ から生成される、 $Cay(S_4, T_2)$ の誘導部分グラフ $Cay(U_4, T'_2)$ を考える。

$Cay(U_4, T'_2)$ 上の 2 頂点 V_p, V_q について、頂点 V_p から頂点 V_q に有向辺が接続するとき、有向辺の接続条件から、

$$V_p^{-1} * V_q = h_m \in T'_2 \quad (3)$$

である。

• $|T'_2| > |T_1|$ であるとき

このとき、ある生成元 $h_m \in T'_2$ について

$$V_p^{-1} * V_q = h_m \Rightarrow f^{-1}(V_p^{-1} * V_q) = f^{-1}(h_m)$$

を満たさない場合がある。これは $|T'_2| > |T_1|$ であるならば、ある元 $h \in T'_2$ について、 $f^{-1}(h) \notin T_1$ であるためである。

よって、このとき命題②-A を満たさない場合があることが分かる。

・ $|T_2| < |T_1|$ であるとき

このとき、ある生成元 $g_m \in T_1$ について

$$v_p^{-1} * v_q = g_m \Rightarrow f(v_p^{-1} * v_q) = f(g_m)$$

を満たさない場合がある。これは $|T_2| < |T_1|$ であるならば、ある元 $g \in T_1$ について $f(g) \notin T_2'$ であるためである。

よって、このとき命題②-A を満たさない場合があることが分かる。

これより、命題②-A を満たす十分条件は「 $|T_2'| = |T_1|$ を満たす」ことであることが導かれる。

・ $|T_2'| = |T_1|$ であるとき

先に $T_2' \subset U_4$ の場合を考えたが、 $T_2' \subset S_4$ の場合はどうなるだろうか？

$f(T_1) \not\subset T_2'$ である場合、グラフ $Cay(U_4, T_2')$ は明らかに命題②-A を満たさない。

そこで、部分集合 $W \subseteq (S_4 - U_4)$ を定義して、 $T_2' = f(T_1) \cup W$ である場合を考える。ただし集合 $S_4 - U_4$ は $S_4 - U_4 = \{x | x \in S_4 \wedge x \notin U_4\}$ と定義される集合である。

このとき、 $Cay(U_4, T_2')$ 上の2頂点 v_p, v_q について、 v_p から v_q に有向辺が接続するとき、有向辺の接続条件から

$$V_p^{-1} * V_q = h_m \in T_2'$$

であり、群 U_4 は群 S_{n+1} の部分群であること、 $f(T_1) \subseteq U_4$ かつ $(S_4 - U_4) \not\subset U_4$ であることから、

$$V_p^{-1} * V_q = h_m \in f(T_1) \quad (4)$$

であり、(4)式に写像 f^{-1} を適用して、

$$f^{-1}(V_p^{-1} * V_q) = f^{-1}(h_m)$$

群、生成系の定義、写像 f^{-1} が同型写像であることから、

$$f^{-1}(V_p^{-1}) * f^{-1}(V_q) = f^{-1}(h_m)$$

$$\therefore v_p^{-1} * v_q = g_m \in T_1 \quad (5)$$

と導かれる。

(5)式より $Cay(S_3, T_1)$ 上の2頂点 v_p, v_q について、頂点 v_p から頂点 v_q に有向辺が接続することが示された。

仮定より以上の議論は $Cay(U_4, T_2')$ 上の、有向辺が接続する任意の2頂点において成り立つため、ケイリーグラフ $Cay(U_4, T_2')$ とケイリーグラフ $Cay(S_3, T_1)$ が同型であることが導かれる。

以上より、命題②-A「 $Cay(S_4, T_2)$ のある誘導部分グラフが $Cay(S_3, T_1)$ と同型である」が示された。

以上の命題①-A、②-Aより「 $Cay(S_3, T_1)$ と同型である $Cay(S_4, T_2)$ の誘導部分グラフが少なくとも1つ存在する」ための十分条件は「ある同型写像 $f: S_3 \rightarrow U_4$ が存在し、 $T_2 = f(T_1) \cup W$ を満たすこと」であることが導かれる。

ただし、集合 U_4 は集合 S_4 の部分集合で、集合 S_4 が持つ置換のうち、自然数4を固定する置換を含む部分集合と定義し、集合 W は $W \subseteq (S_4 - U_4)$ を満たす集合とする。

B. n 次対称群 S_n と $n+1$ 次対称群 S_{n+1} について

A. で証明した十分条件をもとに、 n 次対称群 S_n と $n+1$ 次対称群 S_{n+1} に関する十分条件に拡張する。

<命題①-Bの証明>

群 S_n, S_{n+1} およびそれぞれの生成系 T_1, T_2 を以下のように

定める。

$$S_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$S_{n+1} = \{V_1, V_2, \dots, V_{(n+1)!}\}$$

$$T_1 = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \quad \text{ただし } k \text{ は } n! \text{ 以下の自然数}$$

$$T_2 = \{h_1, h_2, \dots, h_l\} \quad \text{ただし } l \text{ は } (n+1)! \text{ 以下の自然数}$$

これらは集合として $S_n \supseteq T_1, S_{n+1} \supseteq T_2$ であり、 $f(T_1) \subset T_2$ より任意の $g_m \in f(T_1) = h_m \in T_2$ を満たすように置く。

$Cay(S_n, T_1)$ 上の任意の2頂点 v_p, v_q について、頂点 v_p から頂点 v_q に有向辺が接続するならば、

$$v_p^{-1} * v_q = g_m \in T_1 \quad (6)$$

を満たす。

(6)式について、写像 f を適用すると

$$f(v_p^{-1} * v_q) = f(g_m)$$

群、生成系の定義、写像 f が同型写像であることから

$$f(v_p^{-1}) * f(v_q) = f(g_m) \\ V_p^{-1} * V_q = h_m \in T_2 \quad (7)$$

が導かれる。

(7)式より、有向辺の接続条件から $Cay(S_{n+1}, T_2)$ 上の2頂点 V_p, V_q について、頂点 V_p から頂点 V_q に有向辺が接続することが示された。

よって $Cay(S_n, T_1)$ 上の有向辺が接続する任意の2頂点について、対応する2頂点が $Cay(S_{n+1}, T_2)$ 上に存在し、それらが有向辺で接続されることが示され、命題①-B「任意の $Cay(S_n, T_1)$ を定めたとき、 $Cay(S_n, T_1)$ と同型である $Cay(S_{n+1}, T_2)$ の誘導部分グラフが存在する」は示された。

<命題②-Bの証明>

群 S_{n+1} の部分群 U_x と生成系 $T_2' = \{h_1, h_2, \dots, h_j | 1 \leq j \leq n\} \subset U_x \wedge T_2' \subset T_2$ から生成される、 $Cay(S_{n+1}, T_2)$ の誘導部分グラフ $Cay(U_x, T_2')$ を考える。

$Cay(U_x, T_2')$ 上の2頂点 v_p, v_q について、頂点 v_p から頂点 v_q に有向辺が接続するとき、有向辺の接続条件から、

$$V_p^{-1} * V_q = h_m \in T_2' \quad (8)$$

である。

・ $|T_2'| > |T_1|$ であるとき

このとき、ある生成元 $h_m \in T_2'$ について

$$V_p^{-1} * V_q = h_m \Rightarrow f^{-1}(V_p^{-1} * V_q) = f^{-1}(h_m)$$

を満たさない場合がある。これは $|T_2'| > |T_1|$ であるならば、ある元 $h \in T_2'$ について、 $f^{-1}(h) \notin T_1$ であるためである。

よって、このとき命題②-B を満たさない場合があることが分かる。

・ $|T_2'| < |T_1|$ であるとき

このとき、ある生成元 $g_m \in T_1$ について

$$v_p^{-1} * v_q = g_m \Rightarrow f(v_p^{-1} * v_q) = f(g_m)$$

を満たさない場合がある。これは $|T_2'| < |T_1|$ であるならば、ある元 $g \in T_1$ について $f(g) \notin T_2'$ であるためである。

よって、このとき命題②-B を満たさない場合があることが分かる。

これより、命題②-B を満たす十分条件は「 $|T_2'| = |T_1|$ を満たす」ことであることが導かれる。

・ $|T_2'| = |T_1|$ であるとき

先に $T_2' \subset U_x$ の場合を考えたが、 $T_2' \subset S_{n+1}$ の場合はどのようになるだろうか？

$f(T_1) \not\subset T_2'$ である場合、グラフ $\text{Cay}(U_x, T_2')$ は明らかに命題②-B を満たさない。

そこで、部分集合 $W \subseteq (S_{n+1} - U_x)$ を定義して、 $T_2' = f(T_1) \cup W$ である場合を考える。ただし集合 $S_{n+1} - U_x$ は $(S_{n+1} - U_x) = \{y \in S_{n+1} \wedge y \notin U_x\}$ と定義される集合である。

このとき、 $\text{Cay}(U_x, T_2')$ 上の 2 頂点 V_p, V_q について、 V_p から V_q に有向辺が接続するとき、有向辺の接続条件から

$$V_p^{-1} * V_q = h_m \in T_2'$$

であり、群 U_x は群 S_{n+1} の部分群であること、 $f(T_1) \subseteq U_x$ かつ $(S_{n+1} - U_x) \not\subseteq U_x$ であることから、

$$V_p^{-1} * V_q = h_m \in f(T_1) \quad (9)$$

であり、(4)式に写像 f^{-1} を適用して、

$$f^{-1}(V_p^{-1} * V_q) = f^{-1}(h_m)$$

群、生成系の定義、写像 f^{-1} が同型写像であることから、

$$f^{-1}(V_p^{-1}) * f^{-1}(V_q) = f^{-1}(h_m) \\ \therefore v_p^{-1} * v_q = g_m \in T_1 \quad (10)$$

と導かれる。

(5)式より $\text{Cay}(S_n, T_1)$ 上の 2 頂点 v_p, v_q について、頂点 v_p から頂点 v_q に有向辺が接続することが示された。

仮定より以上の議論は $\text{Cay}(U_x, T_2')$ 上の、有向辺が接続する任意の 2 頂点において成り立つため、ケイリーグラフ $\text{Cay}(U_x, T_2')$ とケイリーグラフ $\text{Cay}(S_n, T_1)$ が同型であることが導かれる。

以上より、命題②-B 「 $\text{Cay}(S_{n+1}, T_2)$ のある誘導部分グラフが $\text{Cay}(S_n, T_1)$ と同型である」が示された。

以上の命題①-B、②-B より「 $\text{Cay}(S_n, T_1)$ と同型である $\text{Cay}(S_{n+1}, T_2)$ の誘導部分グラフが少なくとも 1 つ存在する」ための十分条件は「ある同型写像 $f: S_n \rightarrow U_x$ が存在し、 $T_2 = f(T_1) \cup W$ を満たすこと」であることが導かれる。

ただし、集合 U_x は集合 S_{n+1} の部分集合で、集合 S_{n+1} が持つ置換のうち、自然数 x を固定する置換を含む部分集合と定義し、集合 W は $W \subseteq (S_{n+1} - U_x)$ を満たす集合とする。

6. 考察

本研究では以下の定理を証明した。

定理「 n 次対称群 S_n から生成されるケイリーグラフ $\text{Cay}(S_n, T_1)$ と $n+1$ 次対称群 S_{n+1} から生成されるケイリーグラフ $\text{Cay}(S_{n+1}, T_2)$ について、ある同型写像 $f: S_n \rightarrow U_x$ が存在し、 $T_2 = f(T_1) \cup W$ を満たすならば、 $\text{Cay}(S_n, T_1)$ と同型である $\text{Cay}(S_{n+1}, T_2)$ の誘導部分グラフが少なくとも 1 つ存在する。」

この定理は以下のように表現できる。

ケイリーグラフの生成元および生成系は、あみだくじにおける横棒のまとまりおよびその集合とみなすことができる。(図.13 参照)

生成系とあみだくじの対応

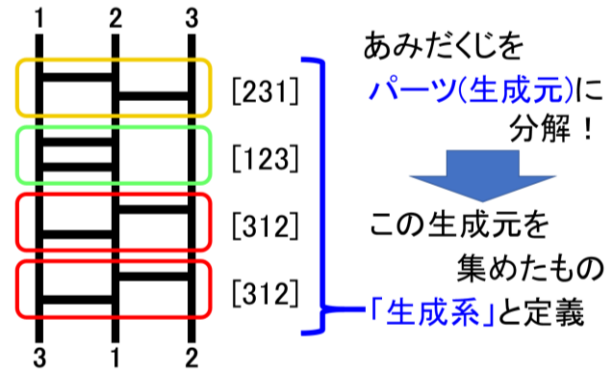


図.13 生成系とあみだくじの対応

このようにケイリーグラフとあみだくじを対応付ける。例えば $\text{Cay}(S_3, T_1)$ と $\text{Cay}(S_4, T_2)$ について、以下のような縦棒 3 本のあみだくじ a_3 と縦棒 4 本のあみだくじ b_4 を考える。(図.14 参照)

定理の概要

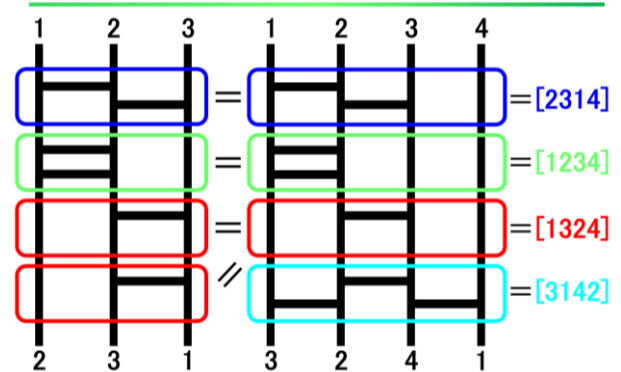


図.14 あみだくじ a_3 (左) とあみだくじ b_4 (右)

図.14 で示した 2 つのあみだくじの生成系を、それぞれ $T(a_3), T(b_4)$ と表記することにする。

それぞれの生成系は

$$T(a_3) = \{[123], [231], [132]\}$$

$$T(b_4) = \{[1234], [2314], [1324], [3142]\}$$

と表せる。

これらは、同型写像 $f: S_3 \rightarrow U_4$ を用いて

$$T(b_4) = f(T(a_3)) \cup \{[3142]\}$$

と表せる。

集合 $\{[3142]\}$ は $\{[3142]\} \subset (S_4 - U_4)$ であることから、定理で与えた十分条件「 $T_2 = f(T_1) \cup W$ 」を満たす。

これより定理から、生成系 $T(a_3), T(b_4)$ で与えられるケイリーグラフ $\text{Cay}(S_3, T(a_3)), \text{Cay}(S_4, T(b_4))$ について、 $\text{Cay}(S_3, T(a_3))$ と同型である $\text{Cay}(S_4, T(b_4))$ の誘導部分グラフが存在する。

このことから、「 $\text{Cay}(S_n, T_1)$ と同型である $\text{Cay}(S_{n+1}, T_2)$ の誘導部分グラフが少なくとも 1 つ存在する」ための十分条件の 1 つは、「生成系 T_1, T_2 が置換として等しい元を共通して持つこと」ということもできる。

また、十分条件を満たさない例を考えてみる。

以下に示す縦棒 3 本のあみだくじ a_3' 、縦棒 4 本のあみだくじ b_4' を考える。(図.15 参照)

定理の概要

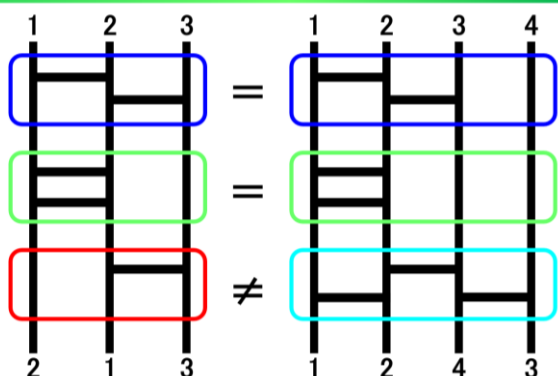


図.15 あみだくじ a_3' (左) とあみだくじ b_4' (右)

先と同様に、それぞれのあみだくじの生成系は

$$T(a_3') = \{[123], [231], [132]\}$$

$$T(b_4') = \{[1234], [2314], [3142]\}$$

と表せる。

これらについて、定理で与えた十分条件「 $T_2 = f(T_1) \cup W$ 」では表現できない。($f([132]) \notin T(b_4')$ であるため.)

実際にケイリーグラフを生成してみると以下のことから、(図.16,17 参照) $Cay(S_3, T(a_3'))$ と同型である $Cay(S_4, T(b_4'))$ の誘導部分グラフが存在しないことが分かる。

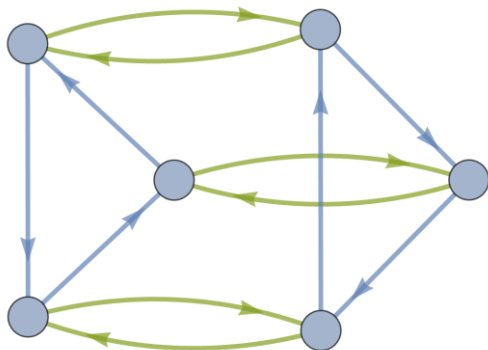


図.16 ケイリーグラフ $Cay(S_3, T(a_3'))$

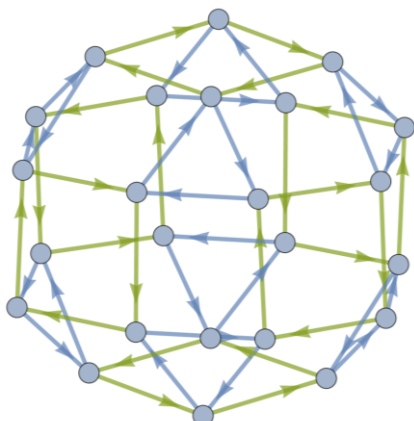


図.17 ケイリーグラフ $Cay(S_4, T(b_4'))$

今回証明した定理によって導かれる条件は「十分条件」であるため、現段階では必要性の確認を個別に行う必要があるが、このように十分条件を満たすとき、「 $Cay(S_n, T_1)$ と同型である $Cay(S_{n+1}, T_2)$ の誘導部分グラフが少なくとも 1 つ存在する」ことを示すことができた。

7. 結論

本研究において、ケイリーグラフの生成系に注目して、以下に示す 2 つの命題を証明し定理化することができた。

命題① 「3 次対称群 S_3 から生成されるケイリーグラフ $Cay(S_3, T_1)$ と 4 次対称群 S_4 から生成されるケイリーグラフ $Cay(S_4, T_2)$ について、ある同型写像 $f: S_3 \rightarrow U_4$ が存在し、 $T_2 = f(T_1) \cup W$ を満たすならば、 $Cay(S_3, T_1)$ と同型である $Cay(S_4, T_2)$ の誘導部分グラフが少なくとも 1 つ存在する。」

命題② 「 n 次対称群 S_n から生成されるケイリーグラフ $Cay(S_n, T_1)$ と $n+1$ 次対称群 S_{n+1} から生成されるケイリーグラフ $Cay(S_{n+1}, T_2)$ について、ある同型写像 $f: S_n \rightarrow U_x$ が存在し、 $T_2 = f(T_1) \cup W$ を満たすならば、 $Cay(S_n, T_1)$ と同型である $Cay(S_{n+1}, T_2)$ の誘導部分グラフが少なくとも 1 つ存在する。」

今回証明した定理により、「 $Cay(S_n, T_1)$ と同型である $Cay(S_{n+1}, T_2)$ の誘導部分グラフが少なくとも 1 つ存在する」ための十分条件を特定することができた。

今回の研究における展望は大きく 2 つある

・研究のさらなる発展

現在の研究の段階では、「 $Cay(S_n, T_1)$ と同型である $Cay(S_{n+1}, T_2)$ の誘導部分グラフが少なくとも 1 つ存在する十分条件」の特定に留まっているが、より緩和された十分条件が存在するのか、またこの条件の必要性はどのように証明が可能か、といった議論が可能であると考えられる。

また、今回は群論的観点からのアプローチを行ったが、グラフ理論的観点からのアプローチとして、ケイリーグラフの隣接行列などから情報を引き出す、ということも可能であると考えられる。隣接行列における「 $Cay(S_n, T_1)$ と同型である $Cay(S_{n+1}, T_2)$ の誘導部分グラフが少なくとも 1 つ存在する十分条件」の特定や必要十分条件まで昇華させることも課題の 1 つである。

・対称群のさらなる応用

今回証明できた「 $Cay(S_n, T_1)$ と同型である $Cay(S_{n+1}, T_2)$ の誘導部分グラフが少なくとも 1 つ存在する十分条件」を用いて、またはさらに深化させることで、冒頭で述べた「群の構造」の調査等にも応用できると考えられる。

群論におけるケイリーの定理より、「任意の有限群はある対称群またはその部分群と同型である」ということが示されており、本研究で証明した「 $Cay(S_n, T_1)$ と同型である $Cay(S_{n+1}, T_2)$ の誘導部分グラフが少なくとも 1 つ存在する」十分条件を用いることで、有限群の構造の調査に新たな切

り口を見いだせる可能性がある。

また、この定理を、群論を用いる他分野への研究に応用できるのではないかと考えている。

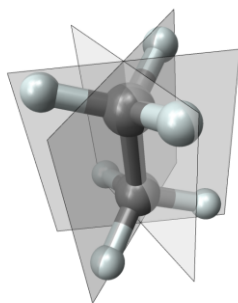
例えば、化学において、結晶構造の類別や分子軌道の表現を行う際に分子の対称性をもとにした「点群」を用いられることがある。⁵⁾ (図.18 参照)

今後の展望

点群

対称性を持つ分子(集合)と
回転など(演算)が成す群

結晶格子の構造類別や
分子軌道の表現に用いる



エタン C_2H_6

図.18 群論の活用例 (点群)

例えば、図.18 に示したエタン分子 C_2H_6 は対称性を持つ面(対称面)が3つ存在し、この面を基準に回転という演算をもとに点群 D_{nh} と呼ばれる群を考える。

この点群に含まれる群として対称群も含まれており、本研究で証明した定理、またその系で示される対称群の性質に関する定理を用いることでこのような分野に貢献することが可能ではないかと考えている。

8. 参考文献

- 1) 「あみだくじで数学～構造の可視化と代数的考察～」宇土高校 窪田瑛仁 2019年
- 2) 「数学ガール/ガロア理論」SB クリエイティブ株式会社 結城浩 2012年
- 3) 「組合せ論 上」丸善出版 J.H.ヴァン・リント, R.M.ウィルソン 2018年
- 4) 「グラフ理論」丸善出版 R.ディーステル 2012年
- 5) 「有機分子構造化学」技報堂出版 坂本恵一 2004年

9. 謝辞

本研究を行うにあたり、本校数学科の小柳良介先生、父母謙一郎先生、国立大学法人熊本大学大学院先端科学研究部の佐竹翔平先生、城本啓介先生にご指導、ご助言いただきました。

また研究成果を英語で記述するにあたり、本校英語科のユエン先生に文章の表現に関してご助言をいただきました。

加えて、高校1年次から本研究を行うにあたり、これまでご指導、ご支援をいただいたすべての方々に感謝申し上げます。