あみだくじで数学2 ～あみだくじに共通する“誘導部分グラフ”の発見～

要旨

私は身近なあみだくじを数学的対象として考察することが可能であること,特に書籍「数学ガール/ガロア理論」で扱われる縦棒3本のあみだくじの群S_3と縦棒4本のあみだくじの群S_4における構造の共通性に興味を持ち,昨年度から研究を行った.先行研究では,ケイリーグラフに群S_4の構造を落とし込み,群S_4に見られる様々な特徴を可視化することに成功した.特に「群S_4のケイリーグラフと同じ構造が,群S_4のケイリーグラフにも見られる」という興味深い性質を観察した.任意に取った生成系で生成されたケイリーグラフ同士に共通する構造が見られたことを疑問に思い,今年度はそれらが共通する構造を持つための十分条件について,ケイリーグラフの生成系に注目し研究を行った.本研究ではS_3とS_4及び,一般の対称群S_nとS_{n+1}のケイリーグラフにおいて共通構造が見られるための生成系の十分条件を与えた.具体的には,群S_nの生成系をT_n,群S_{n+1}の生成系をT_{n+1},群S_{n+1}の部分群をU_x(ただしU_xの元は$1 \leqq x \leqq n$を満たす自然数xを固定する置換),写像fをS_nからU_xへの同型写像とおくと,「$S = f(S) \cup (S_{n+1} - U_x)$を満たす」ことが所望の十分条件であることを証明した.今後の課題として,今回得られた十分条件を緩和した条件や必要十分条件の特定を行うことがあげられる.

先行研究

あみだくじの構造は?

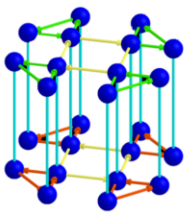
ケイリーグラフを使って表現する!

ケイリーグラフとは…

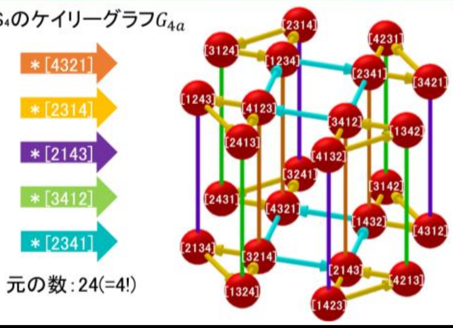
ある特定の置換に

注目して、関係を

視覚化するグラフ

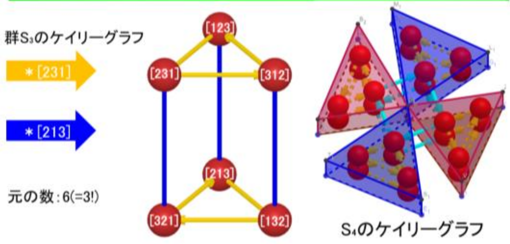


群S₄のケイリーグラフG_{4a}



元の数:24(=4!)

群S₃のケイリーグラフ



元の数:6(=3!)

三角柱状の構造(S₃)が共通して見られる

⇒S₃はあみだくじの群に特有の構造なのか?

目的

あみだくじの観察

$G_{3a} \subset G_{4a}$ $G_{3b} \not\subset G_{4a}$

異なる生成系⇒非同型なグラフ

ケイリーグラフの構造に生成系が関係する!

本研究の目的

・S_3とS_4のケイリーグラフにおいて共通する構造が見られる生成系の必要十分条件を特定する

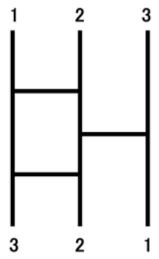
・S_3とS_4からS_nとS_{n+1}に必要十分条件の拡張を行う

研究期間:2020年3月～2020年10月

用語の定義

関連用語の定義

①集合S_nの定義



変換を終えた後の数字列を集合S_nの要素と定義する

(例):左のあみだくじ=[321]

123(変換前)⇒321(変換後)

縦棒3本のあみだくじの集合をS_3

S_3={[123],[132],[213],[231],[312],[321]}

②演算$*$の定義

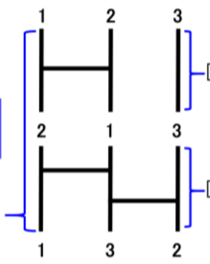
あみだくじを繋ぐ演算$*$

$a * b$

⇒あみだくじaの下にあみだくじbを繋ぐ

(例)右のあみだくじ

[213]$*$[231]=[132]



③$Cay(S_n,T)$の定義

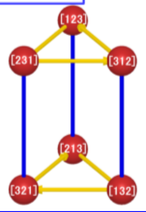
群S_n,生成集合$T \subset S_n$で生成されるケイリーグラフを$Cay(S_n,T)$と定義する

(例)

群S_3,生成系$A = \{[213],[231]\}$から

ケイリーグラフを生成

⇒$Cay(S_3,A)$



③部分グラフ・誘導部分グラフの定義

1.グラフGとG'について

$V(G) \supset V(G') \land E(G) \supset E(G')$を満たすとき

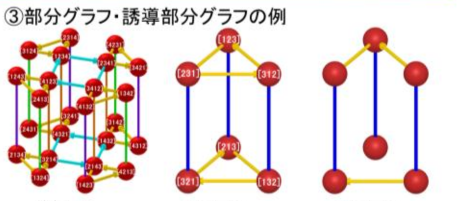
G'を「Gの部分グラフ」と定義する

2.Gの部分グラフG'について

有向辺で結ばれるGの任意の2頂点に対応するG'の全ての2頂点が結ばれるとき

G'を「Gの誘導部分グラフ」と定義する

③部分グラフ・誘導部分グラフの例

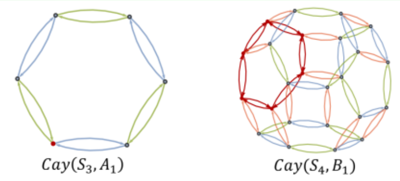


・G_{3a}はG_{4a}の誘導部分グラフ

・G_{3x}はG_{4a}の部分グラフ(誘導部分グラフではない)

予想

予想



$A_1 = \{[213],[132]\}$ B_1={[2134],[1324],[1243]}

置換として[213] = [2134]かつ[132] = [1324]

同じ置換を含む⇔誘導部分グラフとして含む?

A:「生成系T_1,T_2について$f(T_1) \subseteq T_2$である」

B:「$Cay(S_n,T_1)$と同型である$Cay(S_{n+1},T_2)$の誘導部分グラフGが存在する」

$A \Rightarrow B$が成立すると予想!

ただし同型写像$f: S_n \to U_x$と定義する

(集合$U_x \subset S_{n+1}$の要素は群S_{n+1}の単位元eのうちxを固定した6種の置換)

予想の証明

証明する命題

1.任意の$Cay(S_n,T_1)$について$Cay(S_n,T_1)$と同型である$Cay(S_{n+1},T_2)$の誘導部分グラフGが存在する

2.$|U| = |S_n|$である部分集合$U \subset S_{n+1}$について

Uで生成される$Cay(S_{n+1},T_2)$のある誘導部分グラフGが$Cay(S_n,T_1)$と同型である

ただし

$T_1 = \{g_1, g_2, \ldots, g_i \mid 1 \leq i \leq n! = |S_n|\} \subseteq S_n$

$T_2 = \{h_1, h_2, \ldots, h_j \mid i \leq j \leq (n+1)! = |S_{n+1}|\} \subseteq S_{n+1}$

$1 \leq k \leq i$において置換として$g_k = h_k$を満たす

命題1.の証明

<証明に必要な定義・補題>

・群$S_n = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n!}\}$

・群$S_{n+1} = \{V_1, V_2, \ldots, V_{(n+1)!}\}$

・部分集合$S = \{V_1, V_2, \ldots, V_{n!}\} \subset S_{n+1}$

(ただし任意の$V_k \in S$はn+1を固定した置換と定義する)

・同型写像$f: S_n \to S$ ($f(v_p) = V_p$と定義する)

・2頂点$v_p, v_q \in Cay(S_n,T_1)$が$v_p$から$v_q$に有向辺が接続

$\Leftrightarrow v_p^{-1} * v_q = g_k \in T_1$

任意の2頂点v_p, v_qがv_pからv_qに有向辺が向かう

$\Leftrightarrow v_p^{-1} * v_q = g_k \in T_1$より

$f(v_p^{-1} * v_q)$

$= f(v_p^{-1}) * f(v_q)$

$= V_p^{-1} * V_q = h_k \in T_2$

以上より

「任意の2頂点v_pからv_qに有向辺が向かう」

⇒「V_pからV_qに有向辺が向かう」

「任意の2頂点v_pからv_qに有向辺が向かう」

⇒「V_pからV_qに有向辺が向かう」

これより$Cay(S_n,T_1)$において全ての有向辺e_s及び辺で結ばれる2頂点v_p, v_qに対応する有向辺e_t及び辺で結ばれる2頂点V_p, V_qが存在することが示される

以上より「任意の$Cay(S_n,T_1)$について$Cay(S_n,T_1)$と同型な$Cay(S_{n+1},T_2)$の誘導部分グラフGが存在する」が示された

命題2.の証明

<証明に必要な定義・補題>

・部分集合$U_x = \{V_1, V_2, \ldots, V_{n!}\} \subset S_{n+1}$

(ただし任意の$V_k \in U_x$は$x(1 \leq x \leq n+1)$を固定した置換)

・同型写像$f: S_n \to U_x$ ($f(v_p) = V_p$と定義する)

・集合$S_{n+1} - U_x = \{g \in S_{n+1} \mid g \notin U_x\}$

(S_{n+1}の要素からU_xの要素を除いた集合)

・2頂点$v_p, v_q \in Cay(S_n,T_1)$が$v_p$から$v_q$に有向辺が接続

$\Leftrightarrow v_p^{-1} * v_q = g_k \in T_1$

$Cay(S_{n+1},T_2)$の誘導部分グラフ$G = Cay(U_x,T)$を考える

任意の2頂点V_pからV_qに有向辺が向かうとき

$V_p^{-1} * V_q = h_k \in T$である

このとき、生成系$T = f(T_1) \cup (S_{n+1} - U_x)$とおくと

$h_k \in f(T_1)$であることが導かれる

($V_p^{-1} * V_q \in U_x$,同型写像fとU_xの定義より

$U_x \supset f(T_1)$, $S_{n+1} - U_x \not\subset U_x$であるため)

写像fは全単射であることから、定義より

$f^{-1}(V_p^{-1} * V_q)$

$= f^{-1}(V_p^{-1}) * f^{-1}(V_q)$

$= v_p^{-1} * v_q = g_k$

よって以上より

「任意の2頂点V_pからV_qに有向辺が向かう」

⇔「対応するv_pからv_qに有向辺が向かう」

「任意の2頂点V_pからV_qに有向辺が向かう」

⇒「対応するv_pからv_qに有向辺が向かう」

$Cay(S_{n+1},T_2)$のある誘導部分グラフ$G = Cay(U_x,T)$において全ての有向辺e_t及び頂点V_pに対応する有向辺e_s及び頂点v_pが存在することが示される

以上より「$|U| = |S_n|$である部分集合$U \subset S_{n+1}$についてUで生成される$Cay(S_{n+1},T_2)$のある誘導部分グラフGが$Cay(S_n,T_1)$と同型である」が示された

結論

本研究において以下の予想を証明し、定理化できた

定理:「同型写像$f: S_n \to U_x$を定め、生成系T_1, T_2について$T_2 = f(T_1) \cup (S_{n+1} - U_x)$である」ことが「$Cay(S_n,T_1)$と同型である$Cay(S_{n+1},T_2)$の誘導部分グラフ$G$が存在する」ことの十分条件である

今後の展望

- 今回特定した十分条件のさらなる緩和
- 必要十分条件への拡張
- グラフ理論的観点からの十分条件の考察
- 有限群の構造研究への応用

謝辞・参考文献

〔謝辞〕

本研究を行うにあたり

本校数学科の小柳良介先生,父母謙一郎先生

熊本大学の佐竹翔平先生,城本啓介先生をはじめ

多くの方々にご指導・ご助言いただきました.感謝申し上げます.

〔参考文献〕

[1] 2019年度SSH研究成果要旨集「あみだくじで数学 ～構造の可視化と代数的考察～」

[2]「数学ガール/ガロア理論」 結城浩

[3]「組合せ論 上」 J.H.ヴァン・リント R.M.ウィルソン

[4]「グラフ理論」 R.ディーステル