“副実像”の写像公式化の研究 ～定式化のための行列の特定と可視化～

1．副実像とは

副実像の大発見｜実は実像だった！

暗室で凸レンズの焦点距離を測る実験中

↓

レンズの前方・後方にある2つの小さな倒立像に着眼

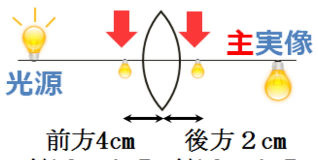
↓

スクリーンに写った！

↓

実像である事が発覚！

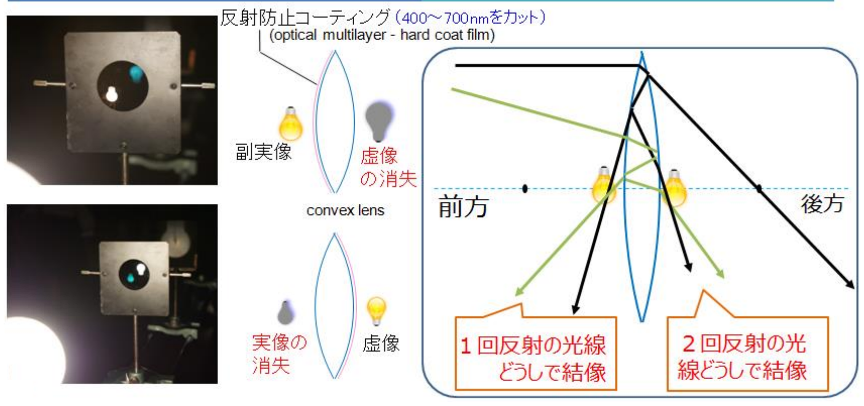
「副実像」と名付けた (the secondary real images)



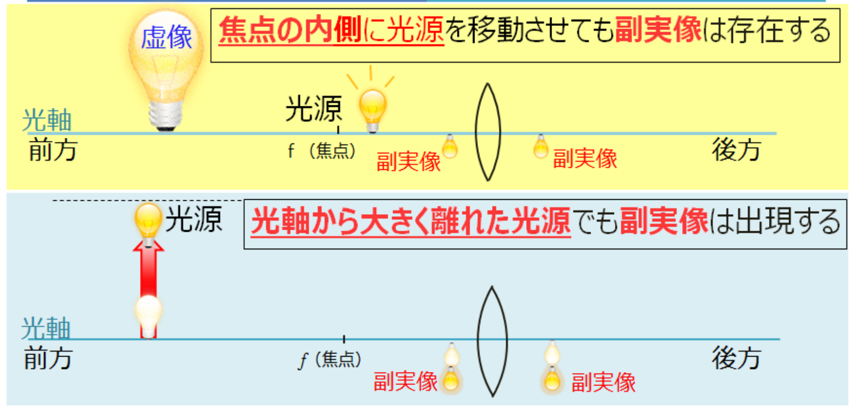
前方4cm付近に出現　後方2cm付近に出現

1つの凸レンズに実像が3つあったという事実！

特注レンズ(片面反射防止コートレンズ)で解明



副実像特有の性質



2．副実像の出現位置の測定

カメラに写る副実像

【図】映像に映るゴースト
（円で囲んだ箇所）
NHKドラマ「中学生日記」のワンシーン（2006.7月）
人の顔のゴーストが写っている。

専門家は気付かなかった？

レンズ後方

- **光軸付近の光源によるゴースト**

-ホコリ由来や機器由来、レンズ接着面由来のゴーストと区別できず
-副実像を含むレンズ由来ゴーストだけでも数100個も存在

- **光軸外の光源によるゴースト**

-通常、受像部に届く副実像は絞りやフィルターでカットされてしまう
-レンズメーカーが用いるゴーストの計算は光軸付近のみに適用

特定が困難

レンズ前方

- **レンズ前方の副実像は虚像と混在している**

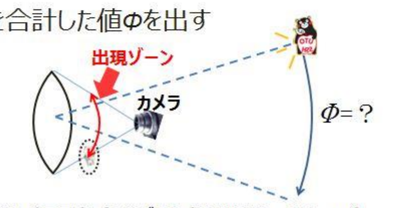
-反射防止コーティングによって副実像も虚像もほとんどカット

虚像と思い込んでいた

カメラ内部

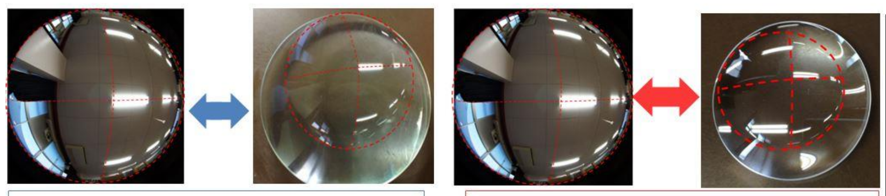
副実像の出現角度の測定｜方法

①焦点距離10倍の位置からレンズに向けて光源の光を当てる
②副実像が出現しなくなった時の角度の値を左右測る
③左右を合計した値φを出す



※カメラ固定（レンズとカメラの距離＝40cm）

魚眼レンズとの比較｜平凸・凸レンズ

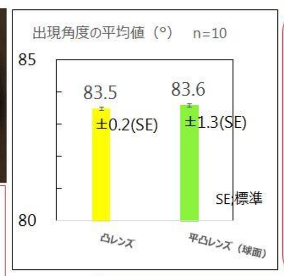


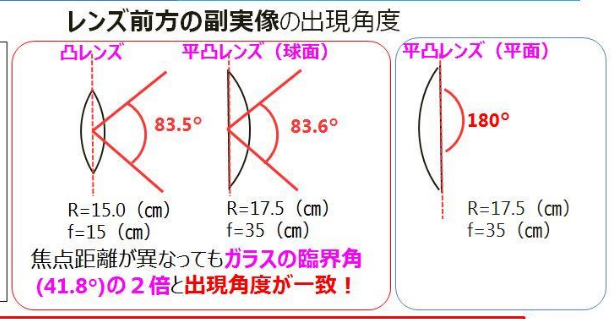
平凸レンズの副実像は、魚眼効果によって出現していた！

凸レンズの副実像も、魚眼効果によって出現していた！

魚眼効果｜出現角度がついに判明！

レンズ前方の副実像の出現角度

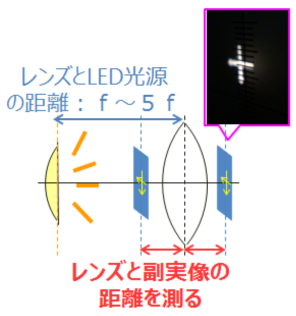




焦点距離が異なってもガラスの臨界角(41.8°)の2倍と出現角度が一致！

魚眼効果による出現角度は物質の臨界角に依存することが判明。

5 出現位置｜測定と考察



〔図〕出現位置の測定

〔表〕光源の比較と誤差（LEDと裸電球）単位：mm

	f	2f	3f	4f	5f	
平均(裸電球)	45.2	44.4	39.7	39.2	–	
平均(LED)	44.6	44.8	38.7	38.9	41.0	
標準誤差;SE (裸電球)	1.01	1.10	1.03	1.20	–	
標準誤差;SE (LED)	0.73	0.48	0.46	0.84	0.99	
最大誤差(裸電球)	±5.4	±4.9	±5.1	±6.1	–	
最大誤差(LED)	±3.6	±3.3	±2.9	±5.6	±4.0	誤差平均
誤差；%(裸電球)	12%	11%	13%	16%	–	12.9%
誤差；%(LED)	8%	7%	7%	14%	–	9.3%

→裸電球に比べ平面LEDの最大誤差は、約4%向上

GeoGebraとは？

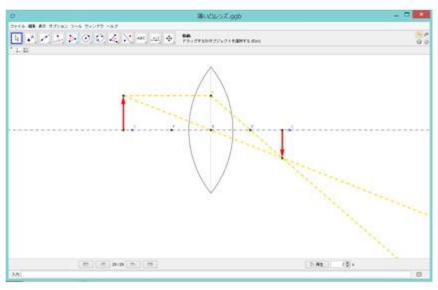
- **どんなソフト？**

-Java環境で動く作図ソフト
-幾何、代数、解析を1つにまとめた動的数学ソフトウェア

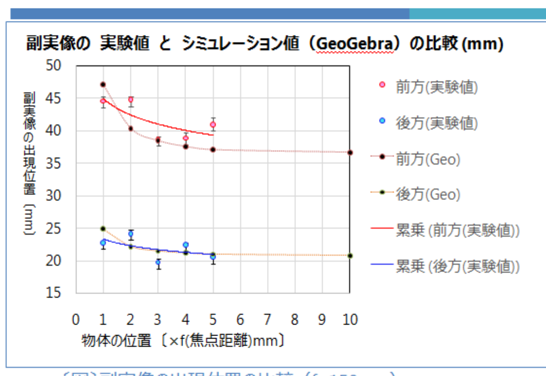
- **動的なシミュレーション**

-オブジェクトを移動・変形させると数式も自動的に変更
-数式を変更するとそれに応じてオブジェクトも変形

- **リアルな解析**



GeoGebraによる検証｜考察



〔図〕副実像の出現位置の比較（f=150mm）　実験値；SE(標準誤差)

前方の副実像はシミュレーション値とほぼ一致（誤差4%）し、後方は完全に一致した。

4%の誤差の原因：
→前方の副実像の出現位置は後方の2倍近くの位置に出現するため、目視による読み取りの誤差と考えられる。

3．数式化

光線追跡 (Ray Tracing)

レンズのシステム行列

光の反射・屈折など光線の追跡を幾何学的計算で追いかける
-行列計算は繰り返しが得意
-ただし、光軸上の光線追跡しか対応できない（光軸近似）

光線追跡のシステム行列の例

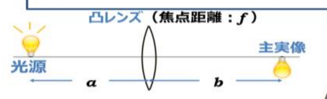
$$
\underset{\text{入射}}{\begin{pmatrix}1&0\\ \frac{1-n}{R}&1\end{pmatrix}}\quad
\underset{\text{転送}}{\begin{pmatrix}1&\frac{d}{n}\\ 0&1\end{pmatrix}}\quad
\underset{\text{反射}}{\begin{pmatrix}1&0\\ -\frac{2n}{R}&1\end{pmatrix}}\quad
\underset{\text{出射}}{\begin{pmatrix}1&0\\ \frac{1-n}{R}&1\end{pmatrix}}
$$

教科書にも掲載されている「レンズの写像公式」を、システム行列による光線追跡の手法で確認

$$
\begin{pmatrix}C&D\\A&B\end{pmatrix}=\underset{\text{出射}}{\begin{pmatrix}1&0\\ \frac{1-n}{R}&1\end{pmatrix}}\underset{\text{転送}}{\begin{pmatrix}1&\frac{d}{n}\\ 0&1\end{pmatrix}}\underset{\text{入射}}{\begin{pmatrix}1&0\\ \frac{1-n}{R}&1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}1&\frac{d}{n}\\ \frac{2(1-n)}{R}+\frac{d(1-n)^2}{nR^2}&1+\frac{d(1-n)}{nR}\end{pmatrix}
$$

度数（光を屈折する力）を表す屈折力A: $A=\frac{2(1-n)}{R}+\frac{d(1-n)^2}{nR^2}$

ガラスの屈折率n=1.5、$R=f$（凸レンズ）とおいて近似（レンズの厚みd=0）すると、 $\begin{pmatrix}C&D\\A&B\end{pmatrix}\fallingdotseq\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{1}{f}&1\end{pmatrix}$



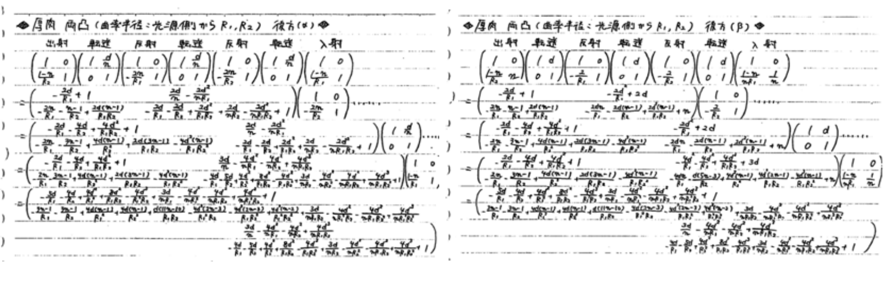
$$
\begin{pmatrix}C'&D'\\A'&B'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C&D\\A&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{b}{f}&a+b-\frac{ab}{f}\\ -\frac{1}{f}&1-\frac{a}{f}\end{pmatrix}
$$

点状物体は収差0で一点に集まる（結像条件D’＝0）ことから、

$$a+b-\frac{ab}{f}=0$$

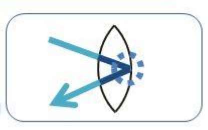
$$\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\fallingdotseq\frac{1}{f}}$$

数式化｜計算過程



数式化｜計算・副実像前方（厚肉レンズ）

入射 → 転送 → 反射 → 転送 → 出射



αパターン：
$$
\begin{pmatrix}C&D\\A&B\end{pmatrix}=\underset{\text{出射}}{\begin{pmatrix}1&0\\ \frac{1-n}{R}&1\end{pmatrix}}\underset{\text{転送}}{\begin{pmatrix}1&\frac{d}{n}\\ 0&1\end{pmatrix}}\underset{\text{反射}}{\begin{pmatrix}1&0\\ -\frac{2n}{R}&1\end{pmatrix}}\underset{\text{転送}}{\begin{pmatrix}1&\frac{d}{n}\\ 0&1\end{pmatrix}}\underset{\text{入射}}{\begin{pmatrix}1&0\\ \frac{1-n}{R}&1\end{pmatrix}}
$$

βパターン：
$$
\begin{pmatrix}C&D\\A&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\ \frac{1-n}{R}&n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&d\\ 0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\ -\frac{2}{R}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&d\\ 0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\ \frac{1-n}{nR}&\frac{1}{n}\end{pmatrix}
$$

$$
\boxed{\frac{1}{f}=-\frac{4n-2}{R}+\frac{2d(3n-4)}{R^2}-\frac{2d^2(n-2)}{R^3}+\frac{2d}{nR^2}-\frac{2d^2}{nR^3}}
$$

二通りの方法（αパターン、βパターン）で計算結果が一致し、再現性の高さが実証された

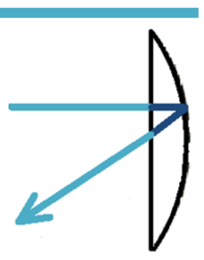
数式化｜平凸レンズ 平面前方

$$
\begin{pmatrix}C&D\\A&B\end{pmatrix}
=\underset{\text{転送}}{\begin{pmatrix}1&\frac{d}{n}\\0&1\end{pmatrix}}\underset{\text{球面反射}}{\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{2n}{R}&1\end{pmatrix}}\underset{\text{転送}}{\begin{pmatrix}1&\frac{d}{n}\\0&1\end{pmatrix}}
$$

[αパターン]
平面入射、平面出射は単位行列のため省略

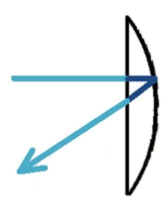
$$
=\underset{\text{平面出射}}{\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix}}\underset{\text{転送}}{\begin{pmatrix}1&d\\0&1\end{pmatrix}}\underset{\text{球面反射}}{\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{2}{R}&1\end{pmatrix}}\underset{\text{転送}}{\begin{pmatrix}1&d\\0&1\end{pmatrix}}\underset{\text{平面入射}}{\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{n}\end{pmatrix}}
$$

[βパターン]



数式化｜平凸レンズ 平面前方

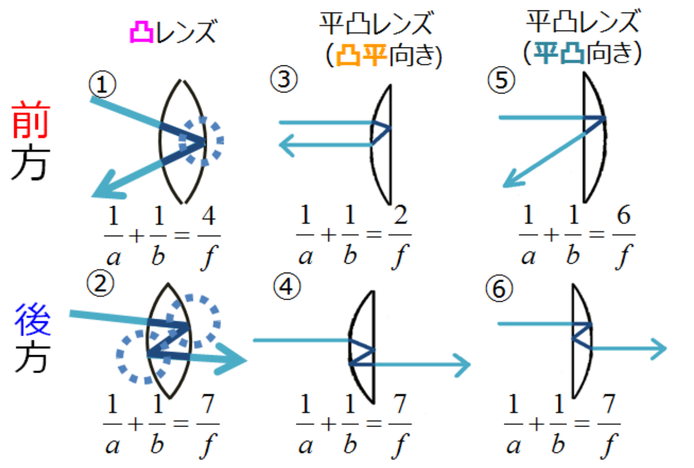
$$
\begin{pmatrix}C&D\\A&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2d}{R}+1&\frac{2d}{n}-\frac{2d^2}{nR}\\ -\frac{2n}{R}&-\frac{2d}{R}+1\end{pmatrix}
$$



d=0、n=1.5、R＝f/2（平凸レンズ）より、

$$
\begin{pmatrix}C&D\\A&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{6}{f}&1\end{pmatrix}
\qquad
\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{6}{f}}
$$

熊本県立宇土高等学校（科学部物理班）
高校２年　成松　紀佳　　小佐井　彩花　　髙田　晶帆



平凸レンズの副実像の出現位置（理論値と実験値）

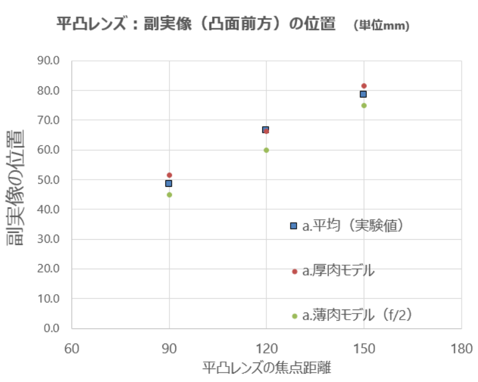
平凸レンズ（a=10fのとき）　*主点補正済み

凸平向き

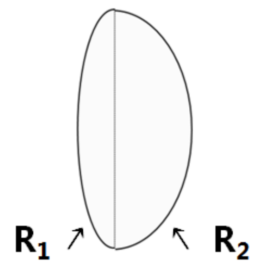
	焦点距離f (mm)	90	120	150
凸面前方	a.平均(実験値)	48.4	66.6	78.6
	a.厚肉モデル	51.4	66.3	81.6
	a.薄肉モデル(f/2)	45.0	60.0	75.0
	実験値_最大誤差	1.65	1.46	2.96
平面後方	b.平均(実験値)	7.5	12.6	16.8
	b.厚肉モデル*	5.0	11.1	16.4
	b.薄肉モデル(f/7)	12.9	17.1	21.4
	実験値_最大誤差	1.41	0.64	1.52

平凸向き

	f (mm)	90	120	150
平面前方	c.平均(実験値)		22.7	27.4
	c.厚肉モデル		20.9	26.1
	c.薄肉モデル(f/6)		20.0	25.0
	実験値_最大誤差		1.06	1.12
凸面後方	d.平均(実験値)		8.1	15.8
	d.厚肉モデル*		11.1	16.4
	d.薄肉モデル(f/7)		17.1	21.4
	実験値_最大誤差		1.16	0.88



数式化｜曲率半径Rの異なるレンズ



後方の副実像

$$\begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_2} & 1 \end{pmatrix}}_{球面出射} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{転送} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R_1} & 1 \end{pmatrix}}_{球面反射} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{転送} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R_2} & 1 \end{pmatrix}}_{球面反射} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{転送} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_1} & 1 \end{pmatrix}}_{球面入射} \text{[αパターン]}$$

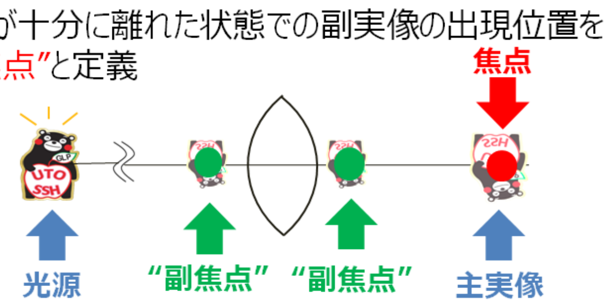
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_2} & n \end{pmatrix}}_{球面出射} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{転送} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix}}_{球面反射} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{転送} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_2} & 1 \end{pmatrix}}_{球面反射} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{転送} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{nR_1} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}}_{球面入射} \text{[βパターン]}$$

$R_1=R_2=R$ ➡ 両凸レンズ
$R_1=R, R_2=\infty$ ➡ 凸平向きのレンズ
$R_1=\infty, R_2=R$ ➡ 平凸向きのレンズ
それぞれ一致！

４．副焦点

副焦点｜副焦点の定義

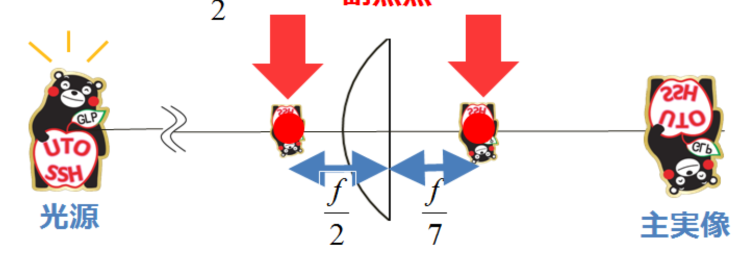
副実像・・・魚眼効果,レンズ内の反射によって結像
→平行光線による焦点の定義が困難
→光源が十分に離れた状態での副実像の出現位置を"副焦点"と定義



副焦点｜副焦点の位置（平凸,凸平向き）

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{f}$　　$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{7}{f}$

$a=\infty$とすると$b=\frac{f}{2}$　　$a=\infty$とすると$b=\frac{f}{7}$



副焦点｜副実像による虚像の出現

光源を副焦点よりもレンズ側に配置すると副実像の虚像が出現

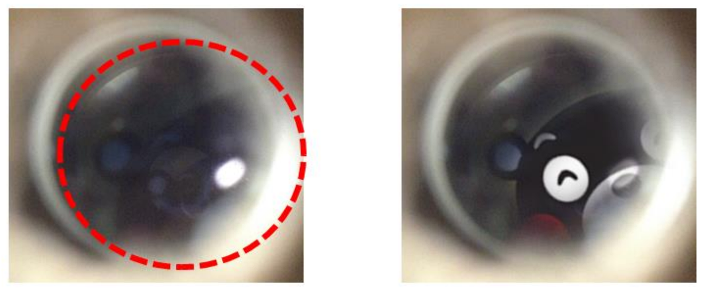
副焦点｜副焦点が存在する根拠

キャラクターの絵を貼り、顕微鏡を覗きながら写真を撮影する。絵が光源の役割を果たす。

接眼レンズについて、副実像の虚像(正立)を撮影！

副焦点が存在する根拠｜証拠写真

接眼レンズ付近に出現する正立像(虚像)のくまモン！



副焦点｜身近な副焦点

顕微鏡を覗いたとき、大きなまつ毛が入り込むことがありませんか？

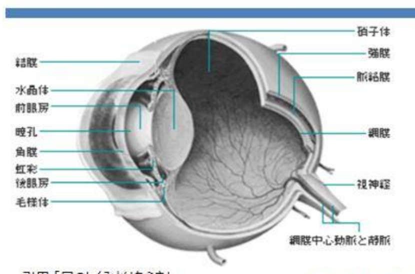
まつ毛に光が当たり、それが光源となる。

接眼レンズ付近に拡大・正立した虚像が出現し、視野に入り込む！

実は副実像の虚像だった！

５．昆虫のマイクロレンズと副実像

質問「ヒトの眼でも副実像は見えるのか」



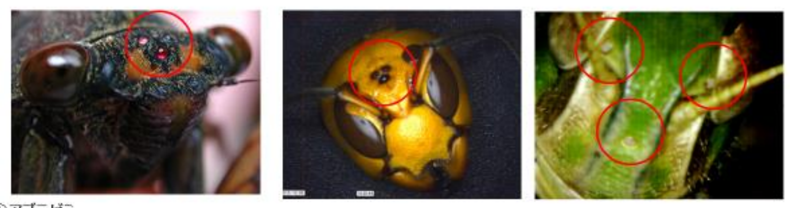
引用:「目のしくみとはたらき」
監修　森一成 医学博士
http://www.ajoc.or.jp/vc_avenue/eye/

水晶体前面の曲率半径約R= 10 mm
水晶体後面の曲率半径約R= 6 mm
（参照:水平・垂直・回旋眼球運動のリアルタイム 画像計測に関する研究）

水晶体は球面ではないため副実像は出現しにくい。出現したとしても副実像は網膜上付近では結像しない。つまり、ヒトの眼では副実像は見えない。

単眼の観察｜対象昆虫

レンズの性質を持つ昆虫の単眼に、副実像は出現するのか、出現しないのか？
また、見えるのか、見えないのか？



①アブラゼミ
学名:*Graptopsaltria nigrofuscata*
網膜細胞付近の赤い色素層が目立つ。
宇土高校、西岡台で約30匹を捕獲。

②オオスズメバチ
学名:*Vespa mandarinia*
西岡台で約15匹を捕獲。

③トノサマバッタ
学名:*Locusta migratoria*
3個の単眼間の距離が離れている。
西岡台で約15匹を捕獲。

単眼の観察｜方法

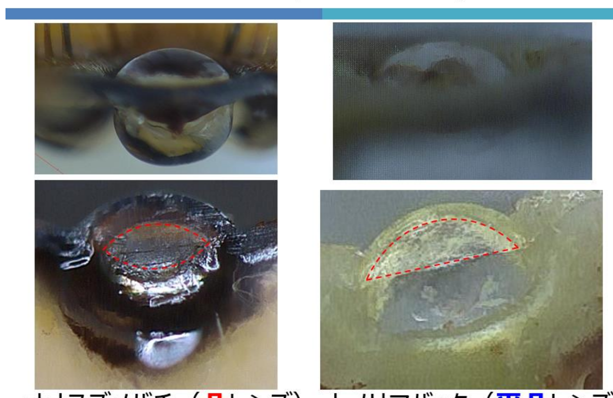
①捕獲した昆虫の単眼を切り出す
②サンプルをクライオモルドに入れ、コンパウンドで包埋
③液体窒素で冷やしたイソペンタンで急速凍結(-160℃)
④クリオスタットでサンプルを薄切する(10μm)
⑤メタノールで3分間、-20℃で固定
⑥スライドガラスに乗せた切片をトルイジンブルーに30秒間つけ、超純水で洗浄
⑦顕微鏡で観察する(1~20倍)
※熊本大学医学部の施設をお借りして実験

工夫した点

・昆虫の単眼は死後1日で使用不可に
⇒学校のディープフリーザー(−60℃)で冷凍し、使用する際に解凍

・急速冷凍の際、液体窒素に入れると極低温により組織が壊れる
⇒−160℃程度のイソペンタンで冷凍

単眼のスライス｜断面図(×200倍)



オオスズメバチ（凸レンズ）　トノサマバッタ（平凸レンズ）

単眼のスライス｜染色

染色液：マイヤー・ヘマトキシリン　細胞および組織構造全体の把握。核が青紫色～青藍色に染めあがる。

→断面や染色境界から「網膜の位置」を決定。

オオスズメバチの単眼｜出現位置の計算

顕微鏡による分析により・・・　判明!

凸レンズ前面の曲率半径R_1:263ミクロン
凸レンズ後面の曲率半径R_2:192ミクロン

⇒ 後方の副実像の出現位置を求めるため、導出した式に代入

$$A=-\frac{3n-1}{R_1}-\frac{3n-1}{R_2}+\frac{4d(n-1)}{R_1^2}+\frac{4d(n-1)}{R_2^2}+\frac{d(11n-10)}{R_1R_2}-\frac{4d^2(2n-3)}{R_1^2R_2}-\frac{4d^2(2n-3)}{R_1R_2^2}+\frac{4d^3(n-2)}{R_1^2R_2^2}+\frac{3d}{nR_1R_2}-\frac{4d^2}{nR_1^2R_2}-\frac{4d^2}{nR_1R_2^2}+\frac{4d^3}{nR_1^2R}$$

R1=263μm, R2＝192μm, d=169μmを代入

⇒ 後方の副実像の出現位置
n=1.5のとき　≒138.9(μm)
n=1.4のとき　≒145.9(μm)

副実像の可視化

６．今回の成果

今年の研究｜まとめ

・両凸レンズ・平凸レンズにおいて副実像の写像公式となる6通りすべてを、光線追跡を用いて公式を導出した。二通りの計算方法(α,β)から結果が一致することを確認した。厚肉による計算結果と近似式による計算結果を比べ、前者がより実測値に近いことを確かめた。

・前・後面で曲率半径が異なるレンズでも副実像の出現位置を特定できる数式が完成した。これにより、後方の副実像の出現位置は、焦点距離fの1/7倍であることから、レンズの形状や組み合わせ枚数が分かれば、副実像の出現位置、つまり、副実像が起因したゴーストの出現位置も特定できることがわかった。

単眼の観察｜まとめ

単位:μm

	レンズの形状	前方の曲率半径R1	後方の曲率半径R2	主実像の出現位置(a=∞,n=1.5)	副実像後方の出現位置(a=∞,n=1.5)	網膜の位置(レンズ後方から)
オオスズメバチ	両凸レンズ	263	192	304	138.9	100
トノサマバッタ	平凸レンズ	190	∞	405	145.1	120
アブラゼミ	両凸レンズ	246	132	286	170.2	200

全ての昆虫において主実像よりも網膜に近い位置に副実像が出現
⇓
昆虫が副実像を見ている可能性が高まった！

謝辞・参考文献

● お世話になった先生方

＜謝辞＞ご指導を頂いている科学部顧問の梶尾滝宏先生、装置等でお世話になっている生物科の先生方に感謝致します。また、本研究を進めるにあたり昆虫の眼の専門的な知見や単眼の切り出し方などのアドバイスをくださった、熊本大学大学院生命科学研究部分子脳科学分野の岩本和也先生、文東美紀先生、国立大学法人総合研究大学院大学の木下充代先生に感謝申し上げます。

＜参考文献＞

1. 2013年度　日本物理学会 第9回Jr.セッション(日本物理學會誌68_2013.3月（27J-8））
2. 「ヘクト光学Ⅰ -基礎と幾何光学-」Eugene Hecht著　尾崎義治・朝倉利光　訳。
3. 「光学 第1 章 幾何光学」 黒田和男著http://qopt.iis.u-tokyo.ac.jp/optics/3lensU_A4.pdf
4. 「第1 章 幾何光学」八木隆志著http://www.sp.u-tokai.ac.jp/~yagi/OpticsandLaser
5. 「幾何光学による光線の追跡」 狩野 覚 著 http://cis.k.hosei.ac.jp/~kano/opt/opt_01.pdf