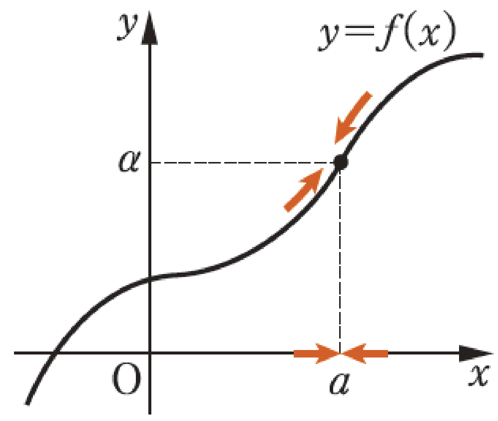
❶ 関数の極限 － 極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ －

(教科書 p.104)

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば



$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

または　　$x \to a$ のとき $f(x) \to \alpha$

と表し，α を $x \to a$ のときの $f(x)$ の **極限値** という。
また，この場合，
“$x \to a$ のとき $f(x)$ は α に **収束** する”という。

❶ 関数の極限　－ 極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ －　（教科書 p.104）

関数の極限値についても，数列の場合と同様に次の性質が成り立つ。

極限値と四則
$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha, \lim_{x \to a} g(x) = \beta$ のとき
[1]　$\lim_{x \to a} kf(x) = k\alpha$　　ただし，k は定数
[2]　$\lim_{x \to a}\{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta$
$\lim_{x \to a}\{f(x) - g(x)\} = \alpha - \beta$
[3]　$\lim_{x \to a}\{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$
[4]　$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　　ただし，$\beta \neq 0$

注意　定数関数 $f(x) = c$ については，$\lim_{x \to a} f(x) = c$ である。

❶ 関数の極限 － 極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ － （教科書 p.105）

例 6

(1) $\lim_{x\to 2}(x^2+3x-4)=2^2+3\cdot 2-4=6$

(2) $\lim_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{x+3}=\dfrac{2\cdot(-1)+1}{-1+3}=-\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x+4}=\sqrt{4}=2$

練習 17 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 1}(2x^2-3x-1)$　　(2) $\lim_{x\to -2}(x-3)(x+2)$

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+1}{2x-3}$　　(4) $\lim_{x\to -1}\sqrt{1-x}$

解答 (1) -2　(2) 0　(3) $-\dfrac{1}{3}$　(4) $\sqrt{2}$

❶ 関数の極限　－ 極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ －

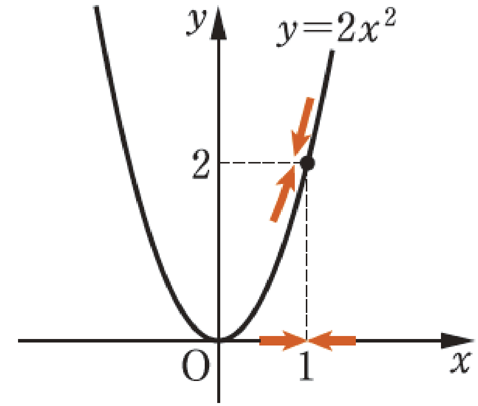
（教科書 p.105）

例　関数 $f(x) = 2x^2$ では

$x \to 1$ のとき　$f(x) \to 2$

すなわち

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

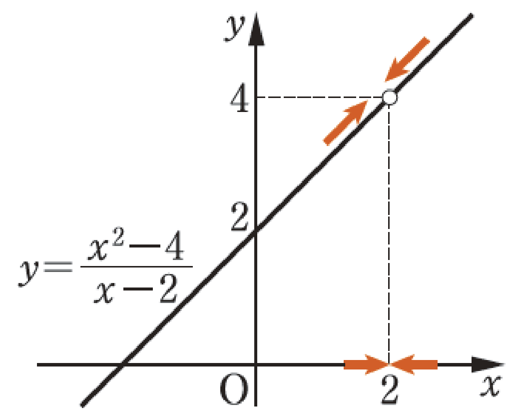


例7　関数$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$は，$x = 2$ では定義されていない。しかし，$x \neq 2$ の範囲では

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2$$

と変形される。したがって

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4$$



❶ 関数の極限 － 極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ －

（教科書 p.106）

例題 7

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right)$

解答

(1) $$\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$$
$$= \lim_{x \to -1}(x^2-x+1) = 3$$

(2) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right) = \lim_{x \to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{(2+x)-2}{2(2+x)}\right\}$$
$$= \lim_{x \to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{2(2+x)}\right\}$$
$$= \lim_{x \to 0}\frac{1}{2(2+x)} = \frac{1}{4}$$

❶ 関数の極限　－ 極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ －

（教科書 p.106）

練習 **18**　次の極限を求めよ。ただし，(3)の a は 0 でない定数とする。

(1)　$\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3}$　　(2)　$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$　　(3)　$\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+x}\right)$

解答　(1)　-6　　(2)　-3　　(3)　$\dfrac{1}{a^2}$

例題 8 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ を求めよ。

解

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+4)-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

❶ 関数の極限 − 極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ −

(教科書 p.106)

練習 **19** 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

解答 (1) $\dfrac{1}{4}$ (2) 4

❶ 関数の極限 － 極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ －

応用例題 5

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2$$

<point>

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha,\ \lim_{x\to a} g(x)=0$ ならば $\lim_{x\to a} f(x)=0$

❶ 関数の極限 － 極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ －

（教科書 p.107）

練習 **20** 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{a\sqrt{x}+b}{x-2} = -1$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{a\sqrt{x+4}+b}{x} = 1$

解答 (1) $a=-2\sqrt{2}$，$b=4$ (2) $a=4$，$b=-8$

❶ 関数の極限 － 極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ －

(教科書 p.108)

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ または $x \to a$ のとき $f(x) \to \infty$

と表し，“$x \to a$ のとき $f(x)$ は **正の無限大に発散する**”という。

また，$f(x)$ の値が負でその絶対値が限りなく大きくなるならば

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ または $x \to a$ のとき $f(x) \to -\infty$

と表し，“$x \to a$ のとき $f(x)$ は **負の無限大に発散する**”という。

❶ 関数の極限 − 極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ −

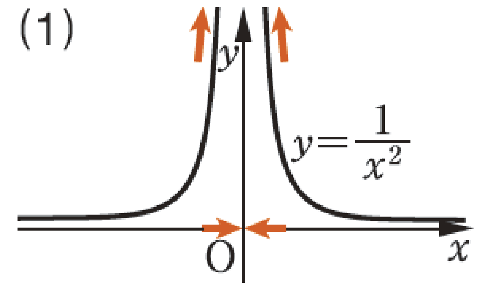
(教科書 p.108)

例8

(1) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

(2) $$\lim_{x \to 1} \left\{ -\frac{1}{(x-1)^2} \right\} = -\infty$$

(1)



まとめ

練習 21 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2}$　　(2) $\lim_{x \to -1} \left\{ -\frac{1}{(x+1)^2} \right\}$

解答 (1) ∞　(2) $-\infty$