4章 極限

１　数列の極限
２　関数の極限

❶ 数列の極限

(教科書 p.86)

項が限りなく続く数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

を　**無限数列**　という。

a_n をその　**第 n 項**　といい,

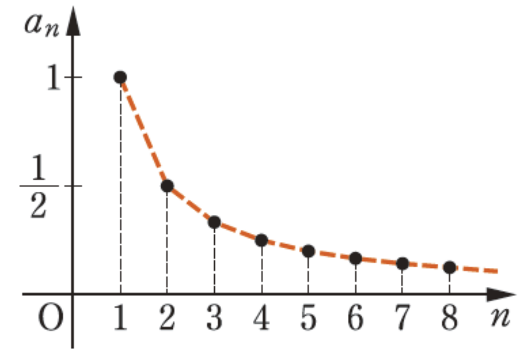
この無限数列を $\{a_n\}$ で表す。

❶ 数列の極限　－数列の収束－

（教科書 p.86）

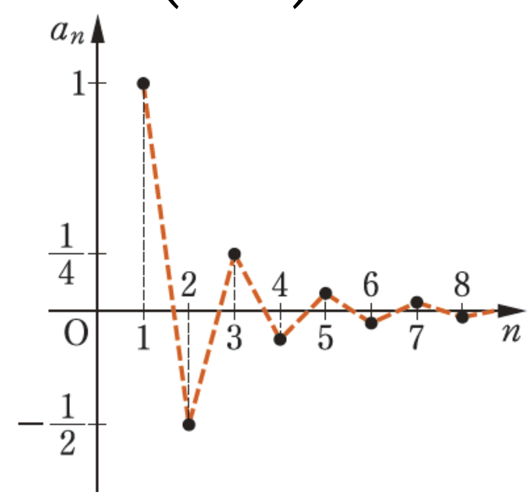
例　(1)　数列　$1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n},\ \cdots$

では，n が限りなく大きくなるとき，第 n 項は ＿＿ に限りなく近づく。



(2)　数列　$1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{8},\ \cdots,\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1},\ \cdots$

では，n が限りなく大きくなるとき，第 n 項は ＿＿ に限りなく近づく。



❶ 数列の極限　– 数列の収束 –　(教科書 p.86)

一般に，数列 $\{a_n\}$ において，n が限りなく大きくなるにつれて，a_n が一定の値 α に限りなく近づくとき，数列 $\{a_n\}$ は α に　**収束**　するといい，α を数列 $\{a_n\}$ の　**極限値**　という。

数列 $\{a_n\}$ の極限値が α であるとき

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$　または　$n \to \infty$ のとき $a_n \to \alpha$

と書く。

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき，数列 $\{a_n\}$ は **発散** するという。

❶ 数列の極限 － 数列の収束 －

例 さっきの例は，次のように表される。

（1） $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

（2） $\lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

❶ 数列の極限　－ 数列の収束 －　（教科書 p.87）

練習 1　次の数列の極限値をいえ。

(1)　$1+1,\ 1+\dfrac{1}{2},\ 1+\dfrac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ 1+\dfrac{1}{n},\ \cdots\cdots$

(2)　$-1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{(-1)^n}{n},\ \cdots\cdots$

(3)　$\cos\pi,\ \cos 3\pi,\ \cos 5\pi,\ \cdots\cdots,\ \cos(2n-1)\pi,\ \cdots\cdots$

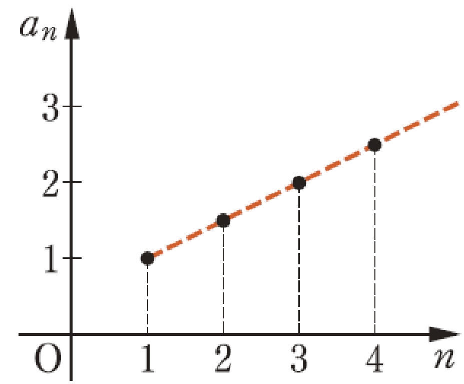
❶ 数列の極限　– 数列の発散 –　（教科書 p.87）

例　(1)　数列

$$1,\quad \frac{3}{2},\quad 2,\quad \frac{5}{2},\quad \cdots,\quad \frac{n+1}{2},\quad \cdots$$

は，n を限りなく大きくすると，

第 n 項 $\dfrac{n+1}{2}$ が限りなく大きくなるので 発散 する。



❶ 数列の極限　－ 数列の発散 －　（教科書 p.88）

一般に，数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくすると a_n が限りなく大きくなるとき，数列 $\{a_n\}$ は **正の無限大に発散** するといい

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{または} \quad n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \infty$$

と書く。また，数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくすると a_n が負で絶対値 $|a_n|$ が限りなく大きくなるとき，数列 $\{a_n\}$ は **負の無限大に発散** するといい，次のように書く。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{または} \quad n \to \infty \text{ のとき } a_n \to -\infty$$

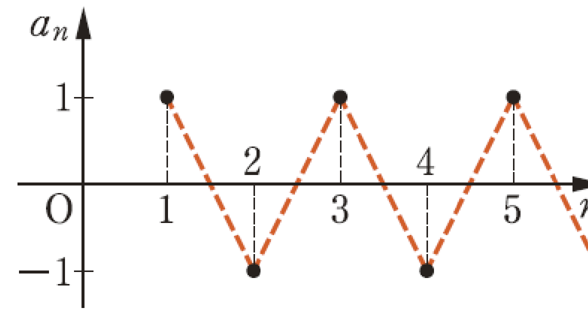
❶ 数列の極限　– 数列の発散 –　（教科書 p.88）

数列

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^{n-1},\ \cdots$$

は，収束しないから発散する。しかし，正の無限大にも負の無限大にも発散しない。このような数列は

　振動　するという。振動するとき，極限はない。



❶ 数列の極限　－ 数列の発散 －　（教科書 p.88）

数列 $\{a_n\}$ の収束，発散についてまとめると，次のようになる。

数列の収束・発散

$$
\begin{cases}
\text{収束} \cdots\cdots\cdots \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha & \text{(一定の値 } \alpha \text{ に収束)} \\
\text{発散(収束しない)} \begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty & \text{(正の無限大に発散)} \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty & \text{(負の無限大に発散)} \\ \text{振動} & \text{(極限はない)} \end{cases}
\end{cases}
$$

❶ 数列の極限 ‒ 数列の発散 ‒

(教科書 p.88)

練習 2 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $2n$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$　(3) $-n^2$　(4) $1+(-1)^n$

数列の極限値については，次の性質が成り立つ。

極限値と四則
数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ が収束して，$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha, \lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ のとき
[1] $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\alpha$ ただし，k は定数
[2] $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta, \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$
[3] $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$
[4] $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ ただし，$\beta\neq 0$

❶ 数列の極限　－ 極限値と四則 －

（教科書 p.89）

例 2

$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$，$\lim_{n\to\infty} b_n = -3$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}(3a_n + b_n) = 3\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = 3\cdot 2 + (-3) = 3$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - 2) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n + 4}{a_n - 3} = \frac{\lim_{n\to\infty}(b_n + 4)}{\lim_{n\to\infty}(a_n - 3)} = \frac{-3+4}{2-3} = -1$$

❶ 数列の極限 － 極限値と四則 －

（教科書 p89）

練習 **3**　$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$，$\lim_{n\to\infty} b_n = -2$ のとき，次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$　(2) $\lim_{n\to\infty}(3a_n + 2b_n)$　(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n - 1)$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$　(5) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_n + 5}{2a_n - 1}$　(6) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n - b_n}{a_n + b_n}$

解答　(1) 3　(2) -1　(3) 0　(4) -2　(5) 3　(6) -3

❶ 数列の極限　－ 極限値と四則 －　(教科書 p89)

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ であるとき

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty,\quad \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\infty$$

は明らかである。しかし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ についてはいろいろな場合がある。これらの収束，発散について調べてみよう。

不定形 → $\dfrac{\infty}{\infty}$，$\dfrac{0}{0}$，$\infty-\infty$ など

には、要注意!!!

$\dfrac{\infty}{\infty}$

$\infty-\infty$

❶ 数列の極限 － 極限値と四則 －

（教科書 p.90）

例3

(1) $$\lim_{n\to\infty}(n^2-3n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{3}{n}\right)=\infty$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

分母の数列が 0 以外の値に収束するような式に変形する

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}}=\infty$$

$\lim_{n\to\infty}\left(2n+\frac{3}{n}\right)=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)=1$

❶ 数列の極限 － 極限値と四則 －

（教科書 p.90）

練習 4 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n^3-n^2)$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n-3n^2)$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n-n^3)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n^2+3}$　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{2n+1}$

解答 (1) ∞　(2) $-\infty$　(3) $-\infty$　(4) $\dfrac{2}{3}$　(5) 0　(6) ∞

❶ 数列の極限 － 極限値と四則 －

（教科書 p.90）

例題 1

次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$

解答

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

❶ 数列の極限 － 極限値と四則 － （教科書 p.90）

練習 次の極限を求めよ。

5

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$

解答 (1) 0 (2) $-\frac{1}{2}$

❶ 数列の極限 －数列の極限と大小関係－ （教科書 p.91）

数列の極限と大小関係については，次の性質が成り立つ。

数列の極限と大小関係
[1] 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ において， $a_n \leqq b_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば　$\alpha \leqq \beta$ [2] 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ において， $a_n \leqq b_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ [3] 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ において， $a_n \leqq b_n \leqq c_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ ならば，$\{b_n\}$ も収束して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$

注意　上の性質 [3] は　**はさみうちの原理**　とよばれている。

❶ 数列の極限　– 数列の極限と大小関係 –　（教科書 p.91）

応用例題 1

極限　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}$　を求めよ。

解

$-1 \leqq \sin\dfrac{n\pi}{3} \leqq 1$ であるから

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3} \leqq \frac{1}{n}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}=0$$

―― はさみうちの原理

❶ 数列の極限　－数列の極限と大小関係－　（教科書 p.91）

練習 6　θ を定数とするとき，次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n\theta$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}$

解答　(1)　0　　(2)　0