第１節　場合の数

1　集合　（数学Ⅰの復習）

[例1]　集合の書き表し方

(1)　3 以上 6 以下の自然数全体の集合 A は

$A=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

(2)　100 以下の自然数全体の集合 B は

$B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 100\}$

[練習1]

次の集合を，{　}の中に要素を書き並べて表せ。

(1)　2 以上 10 以下の偶数全体の集合 A

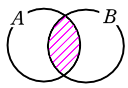
$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

(2)　50 以下の自然数全体の集合 B

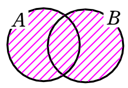
$B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 50\}$

○共通部分と和集合

$A\cap B$：A と B の（共通部分）



$A\cup B$：A と B の（　和集合　）



※要素が１つもない集合を（　空集合　）といい，

（　$\varnothing$　）と書く。

[例2]

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$，$B=\{1,\ 2,\ 6,\ 8,\ 12\}$ について

$A\cap B=\{1,\ 2,\ 6\}$

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12\}$

[練習2]

次の２つの集合の共通部分 $A\cap B$ と和集合 $A\cup B$ を求めよ。

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$，　$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

$A\cap B=\{2\}$

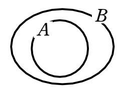
$A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 11\}$

○全体集合と補集合

集合 A のどの要素も集合 B の要素であるとき，

A は B の（部分集合）であるといい，

（　$A\subset B$　）で表す。



また，１つの集合 U を定めて，U の要素や，

U の部分集合だけを考えることがある。このとき，

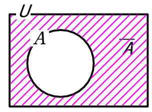
U を（全体集合）という。

U の部分集合 A に対して，

U の要素で，A の要素でない

ものを，A の（　補集合　）

といい，（　$\overline{A}$　）で表す。



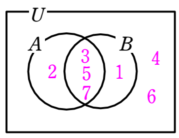
[例3]

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ を全体集合とする。

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$，$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$ について

$\overline{A}=\{1,\ 4,\ 6\}$

$\overline{B}=\{2,\ 4,\ 6\}$



$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ であるから

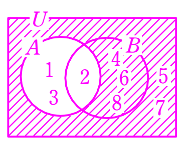
$\overline{A\cup B}=\{4,\ 6\}$

[練習3]

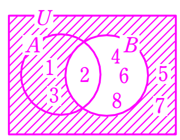
$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ を全体集合とする。

$A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ について，次の集合を求めよ。

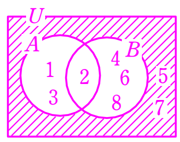
(1)　$\overline{A}=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$



(2)　$\overline{B}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$



(3)　$\overline{A\cup B}=\{5,\ 7\}$



2 集合の要素の個数

集合 A の要素が有限のとき，その個数を

（　$n(A)$　）で表す。

[例4]

(1) $A=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ のとき

$n(A)=5$

(2) 30 以下の自然数のうち，4 の倍数全体の集合を B とする。

$B=\{4,\ 8,\ \cdots\cdots,\ 28\}=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot7\}$

であるから

$n(B)=7$

[練習4]

次の集合 A について，その要素の個数 $n(A)$ を求めよ。

(1) 20 以下の 2 けたの自然数全体の集合 A

$A=\{10,\ 11,\ 12,\ \cdots\cdots,\ 20\}$ であるから

$n(A)=20-10+1=11$

(2) 1 けたの自然数のうち，偶数全体の集合 A

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ であるから

$n(A)=4$

(3) 50 以下の自然数のうち，9 の倍数全体の集合 A

$A=\{9\cdot1,\ 9\cdot2,\ 9\cdot3,\ 9\cdot4,\ 9\cdot5\}$ であるから

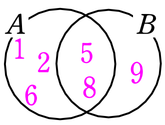
$n(A)=5$

○和集合の要素の個数

２つの集合

$A=\{1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 8\}$，$B=\{5,\ 8,\ 9\}$ について，

$n(A)=5$，$n(B)=3$



$A\cap B=\{5,\ 8\}$ より

$n(A\cap B)=2$，

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$ より

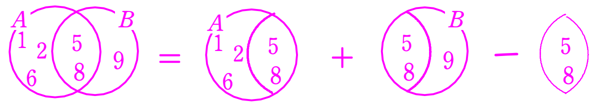
$n(A\cap B)=6$，

これらについて

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

が成り立つ。

これは，たまたまなのか，それとも他の集合でも必ずそうなるのかを考えてみよう！



【和集合の要素の個数】

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

特に　$A\cap B=\varnothing$ のとき

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

[例題1]

30 以下の自然数のうち，次のような数は何個あるか。

(1) 3 の倍数かつ 5 の倍数

U: 30 以下の自然数全体の集合

A: 3 の倍数全体の集合　B: 5 の倍数全体の集合

とする。

$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot10\}$ から　$n(A)=10$

$B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot6\}$ から　$n(B)=6$

3 の倍数かつ 5 の倍数である数全体の集合 $A\cap B$ は

3 と 5 の最小公倍数 15 の倍数全体の集合だから

$A\cap B=\{15\cdot1,\ 15\cdot2\}$

よって，求める個数は　$n(A\cap B)=2$

(2) 3 の倍数または 5 の倍数

3 の倍数または 5 の倍数である数全体の集合は

$A\cup B$ である。

よって，求める個数は

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=10+6-2=14$

[練習5]

40 以下の自然数のうち，次のような数は何個あるか。

(1) 3 の倍数かつ 4 の倍数

U: 40 以下の自然数全体の集合

A: 3 の倍数全体の集合　B: 4 の倍数全体の集合

とする。

$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot13\}$ から　$n(A)=13$

$B=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot10\}$ から　$n(B)=40$

3 の倍数かつ 4 の倍数である数全体の集合 $A\cap B$ は

3 と 4 の最小公倍数 12 の倍数全体の集合だから

$A\cap B=\{12\cdot1,\ 12\cdot2,\ 12\cdot3\}$

よって，求める個数は　$n(A\cap B)=3$

(2) 3 の倍数または 4 の倍数

3 の倍数または 4 の倍数である数全体の集合は

$A\cup B$ である。

よって，求める個数は

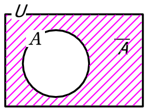
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=13+10-3=20$

○補集合の要素の個数

【補集合の要素の個数】

$$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$$



集合の要素の個数を調べるとき，直接その集合について考えるよりも，補集合の要素の個数を考えた方が計算しやすい場合がある。

～キーワード～

「〇〇でない」

[例題2]
50 以下の自然数のうち，8 の倍数でない数は何個あるか。

U：50 以下の自然数全体の集合
A：8 の倍数全体の集合
とすると

$A = \{8\cdot1,\ 8\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 8\cdot6\}$

よって　$n(A) = 6$

また，8 の倍数でない数全体の集合は $\overline{A}$ である。
よって，求める個数は

$$\begin{aligned} n(\overline{A}) &= n(U) - n(A) \\ &= 50 - 6 \\ &= 44 \end{aligned}$$

[練習6]
50 以下の自然数のうち，次のような数は何個あるか。

(1)　7 の倍数でない数

U：50 以下の自然数全体の集合
A：7 の倍数全体の集合
とすると

$A = \{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot7\}$

よって　$n(A) = 7$

また，7 の倍数でない数全体の集合は $\overline{A}$ である。
よって，求める個数は

$$\begin{aligned} n(\overline{A}) &= n(U) - n(A) \\ &= 50 - 7 \\ &= 43 \end{aligned}$$

(2)　15 の倍数でない数

B：15 の倍数全体の集合
とすると

$B = \{15\cdot1,\ \cdot15\cdot2,\ 15\cdot3\}$

よって　$n(B) = 3$

また，15 の倍数でない数全体の集合は $\overline{B}$ である。
よって，求める個数は

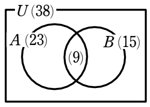
$$\begin{aligned} n(\overline{B}) &= n(U) - n(B) \\ &= 50 - 3 \\ &= 47 \end{aligned}$$

○集合の要素の個数の応用

[例題3]
ある 38 人のクラスで，通学方法を調べたところ，バスを利用する人は 23 人，電車を利用する人は 15 人，バスも電車も利用する人は 9 人いた。

(1)　バスまたは電車を利用する人は何人いるか。

U：このクラス 38 人の集合，
A：バスを利用する人の集合，
B：電車を利用する人の集合
とすると，



$n(A) = 23$，$n(B) = 15$，$n(A \cap B) = 9$ である。
バスまたは電車を利用する人の集合は
$A \cup B$ である。

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(B) - n(A \cap B) \\ &= 23 + 15 - 9 \\ &= 29 \end{aligned}$$

(2)　バスも電車も利用しない人は何人いるか。

バスも電車も利用しない人の集合は
$\overline{A} \cap \overline{B}$　すなわち　$\overline{A \cup B}$ である。

$$\begin{aligned} n(\overline{A \cup B}) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 38 - 29 \\ &= 9 \end{aligned}$$

[練習7]
ある 40 人のクラスで調べたところ，テニスの経験者は 13 人，剣道の経験者は 8 人，テニスと剣道両方の経験者は 3 人いた。

(1)　テニスまたは剣道の経験者は何人いるか。

U：このクラス 40 人の集合，
A：テニス経験者の集合，
B：剣道経験者の集合
とすると，
$n(A) = 13$，$n(B) = 8$，$n(A \cap B) = 3$ である。
テニスまたは剣道の経験者の集合は
$A \cup B$ である。

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(B) - n(A \cap B) \\ &= 13 + 8 - 3 \\ &= 18 \end{aligned}$$

(2)　テニスも剣道も経験がない人は何人いるか。

テニスも剣道も経験がない人の集合は
$\overline{A} \cap \overline{B}$　すなわち　$\overline{A \cup B}$ である。

$$\begin{aligned} n(\overline{A \cup B}) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 40 - 18 \\ &= 22 \end{aligned}$$

[練習問題1]

1 から 100 までの自然数のうち，次のような数の個数を求めよ。

(1)　4 の倍数

A: 4 の倍数全体の集合　とする。

$A=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot25\}$ から　$n(A)=25$

よって，求める個数は　25 個

(2)　4 の倍数または 6 の倍数

U: 1 から 100 までの自然数全体の集合

A: 4 の倍数全体の集合　B: 6 の倍数全体の集合

とする。

$A=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot25\}$ から　$n(A)=25$

$B=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot16\}$ から　$n(B)=16$

4 の倍数かつ 6 の倍数である数全体の集合 $A\cap B$ は

4 と 6 の最小公倍数 12 の倍数全体の集合だから

$A\cap B=\{12\cdot1,\ 12\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 12\cdot8\}$　から

$n(A\cap B)=8$

4 の倍数または 6 の倍数である数全体の集合 $A\cup B$ は

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=25+16-8=33$$

よって，求める個数は　33 個

[問題1]

100 以上 200 以下の自然数のうち，4 の倍数であるが，5 の倍数でない数は何個あるか。

U: 100 以上 200 以下の自然数全体の集合

A: 4 の倍数全体の集合　B: 5 の倍数全体の集合

とする。

$A=\{4\cdot25,\ 4\cdot26,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot50\}$ から　$n(A)=26$

$B=\{5\cdot20,\ 5\cdot21,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot40\}$ から　$n(B)=21$

4 の倍数かつ 5 の倍数である数全体の集合 $A\cap B$ は

4 と 5 の最小公倍数 20 の倍数全体の集合だから

$A\cap B=\{20\cdot5,\ 20\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 20\cdot10\}$ から

$n(A\cap B)=6$

4 の倍数であるが，5 の倍数でない数全体の集合は

$A\cap\overline{B}$　であるから

$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=26-6=20$　より

求める個数は　20 個

[追加の練習問題]

ある 38 人のクラスで調べたところ，公園 A に行った人は 30 人，公園 B に行った人は 15人，A にも B にも行った人は 10 人であった。

(1)　A または B に行った人は何人いるか。

U ：このクラス 38 人の集合

A ：公園 A に行った人全体の集合

B ：公園 B に行った人全体の集合

とすると，

$n(A)=30$，$n(B)=15$，$n(A\cap B)=10$　である。

求める人数は

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=30+15-10=35\ (人)$$

(2)　A にも B にも行かなかった人は何人いるか。

A にも B にも行かなかった人全体の集合は

$\overline{A}\cap\overline{B}$ すなわち $\overline{A\cup B}$ である。

求める人数は

$$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=38-35=3\ (人)$$

3　樹形図，和の法則

場合の数：ある事柄が何通りあるかを調べる。

ポイントは・・・数え上げ！！

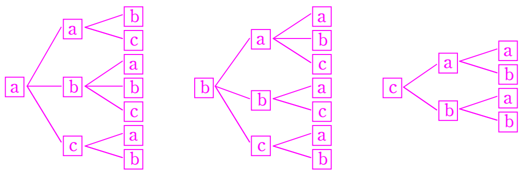
数え上げる方法は中学校でもいくつか学習済み。
全てを列挙して書き出す，樹形図で書き出す，
表で書き出すなど・・・

○樹形図

数え上げを行う際に枝分かれのようにして書き出していく方法がある。その図を（　樹形図　）という。

[練習8]
5枚のカード $\boxed{a}$ $\boxed{a}$ $\boxed{b}$ $\boxed{b}$ $\boxed{c}$ から3枚を選んで1列に並べるとき，並べ方は何通りあるか。

（解1）樹形図をかいてすべての場合を書き出すと，
次のようになる。



よって，並べ方は18通りある。

（解2）できる文字の列をすべて書き出すと，
次のようになる。
aab，aac，aba，abb，abc，aca，acb
baa，bab，bac，bba，bbc，bca，bcb
caa，cab，cba，cbb
よって，並べ方は18通りある。

○和の法則

[例題4]
大小2個のさいころを同時に投げるとき，目の和が5の倍数になる場合は何通りあるか。

目の和が5または10になる場合である。

[1]　目の和が5になる場合は，右の表から
4通り

大	1	2	3	4
小	4	3	2	1

[2]　目の和が10になる場合は，右の表から
3通り

大	4	5	6
小	6	5	4

[1]と[2]は同時には起こらないから，求める場合の数は
$4+3=7$（通り）

☆例題4のポイント①
表を用いた書き出しの利用

☆例題4のポイント②　←これが大事!!

[1]の場合と[2]の場合をそれぞれ数え上げ，
[1]と[2]は同時に起こらないことから，
2つの場合を（　たして　）いるところ。
↓↓
これを（　和の法則　）という。

【和の法則】
事柄A，Bは同時に起こらないとする
事柄Aの起こり方が a 通り，Bの起こり方が b 通り
あるとき，
AまたはBのどちらかが起こる場合の数は
$a+b$　通り。

※和の法則は3つ以上の事柄でも，同じように成り立つ。

[練習9]
大小2個のさいころを同時に投げるとき，目の和が次のようになる場合は何通りあるか。

(1)　7または8

[1]　目の和が7になる場合は，　6　通り

[2]　目の和が8になる場合は，　5　通り

[1]と[2]は同時には起こらないから，
求める場合の数は
$6+5=11$　通り

(2)　6の倍数

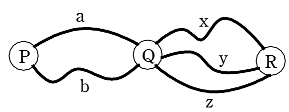
目の和が　6　または　12　になる場合である。
[1]　目の和が　6　になる場合は，　5　通り

[2]　目の和が　12　になる場合は，　1　通り

[1]と[2]は同時には起こらないから，
求める場合の数は
$5+1=6$　通り

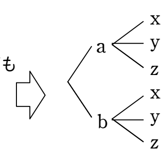
4　積の法則

[例5]
下の図のように，P駅とQ駅を結ぶ2本の鉄道a，bと，Q駅とR駅を結ぶ3本の鉄道x，y，zがある。
これらの鉄道を使って，P駅からQ駅を経由してR駅へ行く行き方は何通りあるかを考えよう。



P駅からQ駅へ行く行き方はa，bの2通りある。
aを使ったときも，bを使ったときも，Q駅からR駅へ行く行き方はx，y，zの3通りずつある。
よって，求める行き方は
$2\times3=6$（通り）

a,bどちらでも
3通りずつの
イメージ



☆例５のポイント

Ｐ駅からＱ駅へ行く行き方はどれに対しても
Ｑ駅からＲ駅へ行く行き方は同じ数ずつあるので，
樹形図から
Ｐ駅からＱ駅へ行く行き方とＱ駅からＲ駅へ行く行き方
を（　かけて　）いるところ。
↓↓
これを（　積の法則　）という。

【積の法則】

事柄Ａの起こり方が a 通り，そのどの場合についても
事柄Ｂの起こり方が b 通りずつあるとき，
ＡとＢがともに起こる場合の数は

$$a\times b\quad 通り.$$

樹形図をイメージすると当たり前のこと。
中学時にも使っていたはず。
※積の法則は３つ以上の事柄でも，同じように成り立つ。

［練習10］
1個のさいころを2回投げるとき，次の場合は何通りあるか。

(1)　1回目に2以上の目が出て，2回目に偶数の目が出る。

1回目の目の出方は 2，3，4，5，6 の 5 通りある。
1回目のどの場合についても，
2回目の目の出方は 2，4，6 の 3 通りずつある。
よって，求める場合の数は
$5\times3=15$　通り

(2)　1回目も2回目も奇数の目が出る。

1回目の目の出方は 1，3，5 の 3 通りある。
1回目のどの場合についても，
2回目の目の出方は 1，3，5 の 3 通りずつある。
よって，求める場合の数は
$3\times3=9$　通り

［練習11］
5人の男子生徒と，7人の女子生徒の中から，男女1名ずつ代表者を選ぶとき，代表者2名の選び方は何通りあるか。

5人の男子から1名を選ぶ方法は 5 通りある。
男子のどの選び方についても，
女子1名の選び方は 7 通りずつある。
よって，求める場合の数は
$5\times7=35$　通り

☆積の法則の応用

積の法則を応用して，「自然数の正の約数の個数」を求めることができます。
なぜそうなるのか理解するのに少し時間が必要な人もいますが，分かってしまえばやることは単純です。

ポイントとなるのは（　素因数分解　）！！

［例題5］
72 の正の約数の個数は何個あるか。

72 を素因数分解すると　$72=2^3\cdot3^2$
2^3 の正の約数は　1，2，2^2，2^3 の 4 個ある。
3^2 の正の約数は　1，3，3^2　の 3 個ある。
2^3 の 4 個の約数のそれぞれの数に，
3^2 の 3 個の約数のそれぞれの数を掛けると，
72 の正の約数がすべて得られる。

この部分が理由の説明になります!!

よって，求める個数は，積の法則により
$4\times3=12$　から　　12 個

	1	3	3^2
1	1	3	9
2	2	6	18
2^2	4	12	36
2^3	8	24	72

［練習12］
次の数の正の約数の個数は何個あるか。

(1)　108

108 を素因数分解すると　$108=2^2\cdot3^3$
2^2 の正の約数は 1，2，2^2 の 3 個ある。
3^3 の正の約数は 1，3，3^2，3^3 の 4 個ある。
よって，求める個数は，積の法則により
$3\times4=12$　から　　12 個

	1	3	3^2	3^3
1	1	3	9	27
2	2	6	18	54
2^2	4	12	36	108

(2)　144

144 を素因数分解すると　$144=2^4\cdot3^2$
2^4 の正の約数は 1，2，2^2，2^3，2^4 の 5 個ある。
3^2 の正の約数は 1，3，3^2 の 3 個ある。
よって，求める個数は，積の法則により
$5\times3=15$　から　　15 個

	1	3	3^2
1	1	3	9
2	2	6	18
2^2	4	12	36
2^3	8	24	72
2^4	16	48	144

☆今回は理由を理解してもらう意味を含めて教科書の解法に準じた解法の記述形式にしましたが、慣れたら次の記述形式でも可です。

(1)の記述例
108 を素因数分解すると　$108=2^2\cdot3^3$
よって，求める個数は，積の法則により
$(2+1)\times(3+1)=3\times4=12$　から
12 個