

第1節 場合の数

1 集合 (数学Iの復習)

[例1] 集合の書き表し方

(1) 3以上6以下の自然数全体の集合 A は

$$A = \{3, 4, 5, 6\}$$

(2) 100以下の自然数全体の集合 B は

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

[練習1]

次の集合を, $\{ \}$ の中に要素を書き並べて表せ。

(1) 2以上10以下の偶数全体の集合 A

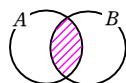
$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

(2) 50以下の自然数全体の集合 B

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$$

○共通部分と和集合

$A \cap B$: A と B の (共通部分)



$A \cup B$: A と B の (和集合)



※要素が1つもない集合を (空集合) といい,
($\emptyset$) と書く。

[例2]

$A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 6, 8, 12\}$ について

$$A \cap B = \{1, 2, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$$

[練習2]

次の2つの集合の共通部分 $A \cap B$ と和集合 $A \cup B$ を求めよ。

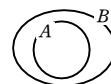
$$A = \{2, 3, 5, 7, 11\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11\}$$

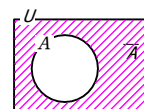
○全体集合と補集合

集合 A のどの要素も集合 B の要素であるとき,
 A は B の (部分集合) であるといい,
($A \subset B$) で表す。



また, 1つの集合 U を定めて, U の要素や,
 U の部分集合だけを考えることがある。このとき,
 U を (全体集合) という。

U の部分集合 A に対して,
 U の要素で, A の要素でない
ものを, A の (補集合)
といい, ($\overline{A}$) で表す。



[例3]

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ を全体集合とする。

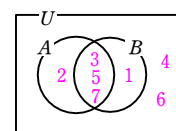
$A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ について

$$\overline{A} = \{1, 4, 6\}$$

$$\overline{B} = \{2, 4, 6\}$$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ であるから

$$\overline{A \cup B} = \{4, 6\}$$

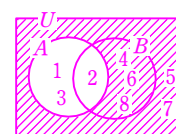


[練習3]

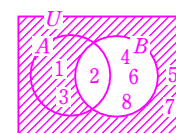
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ を全体集合とする。

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ について, 次の集合を求めよ。

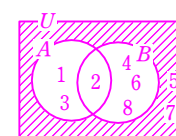
(1) $\overline{A} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$



(2) $\overline{B} = \{1, 3, 5, 7\}$



(3) $\overline{A \cup B} = \{5, 7\}$



2 集合の要素の個数

集合 A の要素が有限のとき、その個数を
($n(A)$) で表す。

[例4]

- (1) $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ のとき

$$n(A) = 5$$

- (2) 30 以下の自然数のうち、4 の倍数全体の集合を B とする。

$$B = \{4, 8, \dots, 28\} = \{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, \dots, 4 \cdot 7\}$$

であるから

$$n(B) = 7$$

[練習4]

次の集合 A について、その要素の個数 $n(A)$ を求めよ。

- (1) 20 以下の 2 けたの自然数全体の集合 A

$$A = \{10, 11, 12, \dots, 20\} \text{ であるから}$$

$$n(A) = 20 - 10 + 1 = 11$$

- (2) 1 けたの自然数のうち、偶数全体の集合 A

$$A = \{2, 4, 6, 8\} \text{ であるから}$$

$$n(A) = 4$$

- (3) 50 以下の自然数のうち、9 の倍数全体の集合 A

$$A = \{9 \cdot 1, 9 \cdot 2, 9 \cdot 3, 9 \cdot 4, 9 \cdot 5\} \text{ であるから}$$

$$n(A) = 5$$

○和集合の要素の個数

2つの集合

$$A = \{1, 2, 5, 6, 8\}, B = \{5, 8, 9\} \text{ について,}$$

$$n(A) = 5, n(B) = 3$$

$$A \cap B = \{5, 8\} \text{ より}$$

$$n(A \cap B) = 2,$$

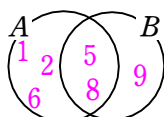
$$A \cup B = \{1, 2, 5, 6, 8, 9\} \text{ より}$$

$$n(A \cup B) = 6,$$

これらについて

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

が成り立つ。



これは、たまたまなのか、それとも他の集合でも必ず
そうなるのかを考えてみよう！

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline A & & B \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 6 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline A \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 6 & 8 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline B \\ \hline 5 & 9 \\ \hline 8 & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 8 \\ \hline \end{array}$$

【和集合の要素の個数】

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

特に $A \cap B = \emptyset$ のとき

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

[例題1]

30 以下の自然数のうち、次のような数は何個あるか。

- (1) 3 の倍数かつ 5 の倍数

U : 30 以下の自然数全体の集合

A : 3 の倍数全体の集合 B : 5 の倍数全体の集合
とする。

$$A = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, \dots, 3 \cdot 10\} \text{ から } n(A) = 10$$

$$B = \{5 \cdot 1, 5 \cdot 2, \dots, 5 \cdot 6\} \text{ から } n(B) = 6$$

3 の倍数かつ 5 の倍数である数全体の集合 $A \cap B$ は
3 と 5 の最小公倍数 15 の倍数全体の集合だから

$$A \cap B = \{15 \cdot 1, 15 \cdot 2\}$$

$$\text{よって, 求める個数は } n(A \cap B) = 2$$

- (2) 3 の倍数または 5 の倍数

3 の倍数または 5 の倍数である数全体の集合は
 $A \cup B$ である。

よって, 求める個数は

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 10 + 6 - 2 = 14 \end{aligned}$$

[練習5]

40 以下の自然数のうち、次のような数は何個あるか。

- (1) 3 の倍数かつ 4 の倍数

U : 40 以下の自然数全体の集合

A : 3 の倍数全体の集合 B : 4 の倍数全体の集合
とする。

$$A = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, \dots, 3 \cdot 13\} \text{ から } n(A) = 13$$

$$B = \{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, \dots, 4 \cdot 10\} \text{ から } n(B) = 10$$

3 の倍数かつ 4 の倍数である数全体の集合 $A \cap B$ は
3 と 4 の最小公倍数 12 の倍数全体の集合だから

$$A \cap B = \{12 \cdot 1, 12 \cdot 2, 12 \cdot 3\}$$

$$\text{よって, 求める個数は } n(A \cap B) = 3$$

- (2) 3 の倍数または 4 の倍数

3 の倍数または 4 の倍数である数全体の集合は
 $A \cup B$ である。

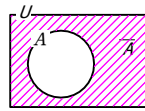
よって, 求める個数は

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 13 + 10 - 3 = 20 \end{aligned}$$

○補集合の要素の個数

【補集合の要素の個数】

$$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$$



集合の要素の個数を調べる時、直接その集合について考えるよりも、補集合の要素の個数を考えた方が計算しやすい場合がある。

～キーワード～

「○○でない」

[例題2]

50以下の自然数のうち、8の倍数でない数は何個あるか。

U : 50以下の自然数全体の集合

A : 8の倍数全体の集合

とすると

$$A = \{8 \cdot 1, 8 \cdot 2, \dots, 8 \cdot 6\}$$

よって $n(A) = 6$

また、8の倍数でない数全体の集合は $\overline{A}$ である。

よって、求める個数は

$$\begin{aligned} n(\overline{A}) &= n(U) - n(A) \\ &= 50 - 6 \\ &= 44 \end{aligned}$$

[練習6]

50以下の自然数のうち、次のような数は何個あるか。

(1) 7の倍数でない数

U : 50以下の自然数全体の集合

A : 7の倍数全体の集合

とすると

$$A = \{7 \cdot 1, 7 \cdot 2, \dots, 7 \cdot 7\}$$

よって $n(A) = 7$

また、7の倍数でない数全体の集合は $\overline{A}$ である。

よって、求める個数は

$$\begin{aligned} n(\overline{A}) &= n(U) - n(A) \\ &= 50 - 7 \\ &= 43 \end{aligned}$$

(2) 15の倍数でない数

B : 15の倍数全体の集合

とすると

$$B = \{15 \cdot 1, 15 \cdot 2, 15 \cdot 3\}$$

よって $n(B) = 3$

また、15の倍数でない数全体の集合は $\overline{B}$ である。

よって、求める個数は

$$\begin{aligned} n(\overline{B}) &= n(U) - n(B) \\ &= 50 - 3 \\ &= 47 \end{aligned}$$

○集合の要素の個数の応用

[例題3]

ある38人のクラスで、通学方法を調べたところ、バスを利用する人は23人、電車を利用する人は15人、バスも電車も利用する人は9人いた。

(1) バスまたは電車を利用する人は何人いるか。

U : このクラス38人の集合、

A : バスを利用する人の集合、

B : 電車を利用する人の集合

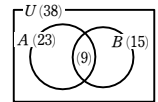
とすると、

$n(A) = 23$, $n(B) = 15$, $n(A \cap B) = 9$ である。

バスまたは電車を利用する人の集合は

$A \cup B$ である。

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 23 + 15 - 9 \\ &= 29 \end{aligned}$$



(2) バスも電車も利用しない人は何人いるか。

バスも電車も利用しない人の集合は

$\overline{A \cap B}$ すなわち $\overline{A \cup B}$ である。

$$\begin{aligned} n(\overline{A \cup B}) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 38 - 29 \\ &= 9 \end{aligned}$$

[練習7]

ある40人のクラスで調べたところ、テニスの経験者は13人、剣道の経験者は8人、テニスと剣道両方の経験者は3人いた。

(1) テニスまたは剣道の経験者は何人いるか。

U : このクラス40人の集合、

A : テニス経験者の集合、

B : 剣道経験者の集合

とすると、

$n(A) = 13$, $n(B) = 8$, $n(A \cap B) = 3$ である。

テニスまたは剣道の経験者の集合は

$A \cup B$ である。

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 13 + 8 - 3 \\ &= 18 \end{aligned}$$

(2) テニスも剣道も経験がない人は何人いるか。

テニスも剣道も経験がない人の集合は

$\overline{A \cap B}$ すなわち $\overline{A \cup B}$ である。

$$\begin{aligned} n(\overline{A \cup B}) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 40 - 18 \\ &= 22 \end{aligned}$$

[練習問題1]

1から100までの自然数のうち、次のような数の個数を求めよ。

(1) 4の倍数

A : 4の倍数全体の集合 とする。

$A = \{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, \dots, 4 \cdot 25\}$ から $n(A) = 25$
 よって、求める個数は 25 個

(2) 4の倍数または6の倍数

U : 1から100までの自然数全体の集合

A : 4の倍数全体の集合 B : 6の倍数全体の集合
 とする。

$A = \{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, \dots, 4 \cdot 25\}$ から $n(A) = 25$

$B = \{6 \cdot 1, 6 \cdot 2, \dots, 6 \cdot 16\}$ から $n(B) = 16$

4の倍数かつ6の倍数である数全体の集合 $A \cap B$ は
 4と6の最小公倍数12の倍数全体の集合だから

$A \cap B = \{12 \cdot 1, 12 \cdot 2, \dots, 12 \cdot 8\}$ から
 $n(A \cap B) = 8$

4の倍数または6の倍数である数全体の集合 $A \cup B$ は

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ = 25 + 16 - 8 = 33$$

よって、求める個数は 33 個

[問題1]

100以上200以下の自然数のうち、4の倍数であるが、5の倍数でない数は何個あるか。

U : 100以上200以下の自然数全体の集合

A : 4の倍数全体の集合 B : 5の倍数全体の集合
 とする。

$A = \{4 \cdot 25, 4 \cdot 26, \dots, 4 \cdot 50\}$ から $n(A) = 26$

$B = \{5 \cdot 20, 5 \cdot 21, \dots, 5 \cdot 40\}$ から $n(B) = 21$

4の倍数かつ5の倍数である数全体の集合 $A \cap B$ は
 4と5の最小公倍数20の倍数全体の集合だから

$A \cap B = \{20 \cdot 5, 20 \cdot 6, \dots, 20 \cdot 10\}$ から
 $n(A \cap B) = 6$

4の倍数であるが、5の倍数でない数全体の集合は
 $A \cap \overline{B}$ であるから

$n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 26 - 6 = 20$ より
 求める個数は 20 個

[追加の練習問題]

ある38人のクラスで調べたところ、公園Aに行った人は30人、公園Bに行った人は15人、AにもBにも行った人は10人であった。

(1) AまたはBに行った人は何人いるか。

U : このクラス38人の集合

A : 公園Aに行った人全体の集合

B : 公園Bに行った人全体の集合

とすると、

$n(A) = 30, n(B) = 15, n(A \cap B) = 10$ である。

求める人数は

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ = 30 + 15 - 10 = 35 \text{ (人)}$$

(2) AにもBにも行かなかった人は何人いるか。

AにもBにも行かなかった人全体の集合は

$\overline{A \cap B}$ すなわち $\overline{A \cap B}$ である。

求める人数は

$$n(\overline{A \cap B}) = n(U) - n(A \cap B) = 38 - 10 = 28 \text{ (人)}$$



③ 樹形図、和の法則

場合の数：ある事柄が何通りあるかを調べる。

ポイントは・・・数え上げ！！

数え上げる方法は中学校でもいくつか学習済み。

全てを列挙して書き出す，樹形図で書き出す，

表で書き出すなど・・・

○樹形図

数え上げを行う際に枝分かれのようにして書き出していく方法がある。その図を（ **樹形図** ）という。

[練習8]

5枚のカード

a

a

b

b

c

 から3枚を選んで1列に並べるとき，並べ方は何通りあるか。

○和の法則

[例題4]

大小2個のさいころを同時に投げるとき，目の和が5の倍数になる場合は何通りあるか。

目の和が5または10になる場合である。

[1] 目の和が5になる場合は，右の表から

4通り

[2] 目の和が10になる場合は，右の表から

3通り

[1]と[2]は同時には起こらないから，求める場合の数は

$4+3=7$ (通り)

大	1	2	3	4
小	4	3	2	1

大	4	5	6
小	6	5	4

☆例題4のポイント①

表を用いた書き出しの利用

☆例題4のポイント② ←これが大事!!

[1]の場合と[2]の場合をそれぞれ数え上げ，

[1]と[2]は同時に起こらないことから，

2つの場合を（ **たして** ）いるところ。

↓

これを（ **和の法則** ）という。

【和の法則】

事柄A，Bは同時に起こらないとする

事柄Aの起こり方がa通り，Bの起こり方がb通り

あるとき，

AまたはBのどちらかが起こる場合の数は

$a + b$ 通り.

※和の法則は3つ以上の事柄でも，同じように成り立つ。

[練習9]

大小2個のさいころを同時に投げるとき，目の和が次のようになる場合は何通りあるか。

(1) 7または8

[1] 目の和が7になる場合は， 通り

[2] 目の和が8になる場合は， 通り

[1]と[2]は同時には起こらないから，
求める場合の数は

通り

(2) 6の倍数

目の和が または になる場合である。

[1] 目の和が になる場合は， 通り

[2] 目の和が になる場合は， 通り

[1]と[2]は同時には起こらないから，
求める場合の数は

通り



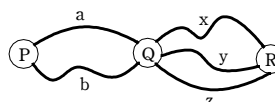
④ 積の法則

[例5]

下の図のように，P駅とQ駅を結ぶ2本の鉄道a，bと，

Q駅とR駅を結ぶ3本の鉄道x，y，zがある。

これらの鉄道を使って，P駅からQ駅を経由してR駅へ行く行き方は何通りあるかを考えよう。



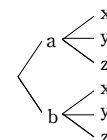
P駅からQ駅へ行く行き方はa，bの2通りある。

aを使ったときも，bを使ったときも，Q駅からR駅へ行く行き方はx，y，zの3通りずつある。

よって，求める行き方は

$2 \times 3 = 6$ (通り)

a, bどちらも
3通りずつの
イメージ



☆例5のポイント

P 駅から Q 駅へ行く行き方はどれに対しても
Q 駅から R 駅へ行く行き方は同じ数ずつあるので、
樹形図から
P 駅から Q 駅へ行く行き方と Q 駅から R 駅へ行く行き方
を (**かけて**) いるところ。

↓↓

これを (**積の法則**) という。

【積の法則】

事柄 A の起こり方が a 通り、そのどの場合についても
事柄 B の起こり方が b 通りずつあるとき、
A と B がともに起こる場合の数は

$$a \times b \text{ 通り}$$

樹形図をイメージすると当たり前のこと。

中学時にも使っていたはず。

※積の法則は3つ以上の事柄でも、同じように成り立つ。

[練習10]

1 個のさいころを2回投げるとき、次の場合は何通りあるか。

- (1) 1 回目に2以上の目が出て、2 回目に偶数の目が出る。

1 回目の目の出方は の 通りある。

1 回目のどの場合についても、

2 回目の目の出方は の 通りずつある。

よって、求める場合の数は
通り

- (2) 1 回目も2回目も奇数の目が出る。

1 回目の目の出方は の 通りある。

1 回目のどの場合についても、

2 回目の目の出方は の 通りずつある。

よって、求める場合の数は
通り



[練習11]

5 人の男子生徒と、7 人の女子生徒の中から、男女1名ずつ代表者を選ぶとき、代表者2名の選び方は何通りあるか。

5 人の男子から1名を選ぶ方法は 通りある。

男子のどの選び方についても、

女子1名の選び方は 通りずつある。

よって、求める場合の数は
通り

☆積の法則の応用

積の法則を応用して、「自然数の正の約数の個数」を求めることができます。

なぜそうなるのか理解するのに少し時間が必要な人もいますが、分かってしまえばやることは単純です。

ポイントとなるのは (**素因数分解**) !!

[例題5]

72 の正の約数の個数は何個あるか。

72 を素因数分解すると $72 = 2^3 \cdot 3^2$

2^3 の正の約数は 1, 2, 2^2 , 2^3 の **4** 個ある。

3^2 の正の約数は 1, 3, 3^2 の **3** 個ある。

2^3 の4個の約数のそれぞれの数に、
 3^2 の3個の約数のそれぞれの数を掛けると、
72 の正の約数がすべて得られる。

この部分が
理由の説明に
なります!!

よって、求める個数は、積の法則により

$$4 \times 3 = 12 \text{ から } 12 \text{ 個}$$

	1	3	3^2
1	1	3	9
2	2	6	18
2^2	4	12	36
2^3	8	24	72

[練習12]

次の数の正の約数の個数は何個あるか。

- (1) 108

108 を素因数分解すると

2^2 の正の約数は の 個ある。

3^3 の正の約数は の 個ある。

よって、求める個数は、積の法則により
から 個

- (2) 144

144 を素因数分解すると

2^4 の正の約数は の 個ある。

3^2 の正の約数は の 個ある。

よって、求める個数は、積の法則により
から 個