

整数の性質

教科としての位置づけ

数学 I

- ・ 数と式
- ・ 集合と論理
- ・ 2 次関数
- ・ 図形と計量
- ・ データの分析

数学 A

- ・ 場合の数と確率
- ・ 整数の性質
- ・ 図形の性質

整数の性質

通常23コマを費やして履修する單元ですが、この内容から厳選して、8コマ相当で学習してみようと思います。

整数の性質

大きく4タイプに取り組みます。

- ①素因数分解を利用した問題
- ②不定方程式
- ③余りに関する問題
- ④N進法

①素因数分解を利用した問題

問題 1

最小公倍数が 2730，最大公約数が 91 であるような 2 つの自然数のうち，
2 数の差の絶対値が最も小さいものを求めよ。

**この問題が解けるように
段階を踏んで学びましょう**

①素因数分解を利用した問題

問題 1 － 1 （小学校の問題）

2 つの自然数，12 と 30 の最大公約数と最小公倍数を
求めよ。

自分で解いてから答え合わせをしてみましょう。

最大公約数 6
最小公倍数 60

①素因数分解を利用した問題

問題 1 － 2 （小学校の問題）

2 つの自然数 108, 420 の最大公約数と
最小公倍数を求めよ。

小学校の解き方に限界があるよね。

①素因数分解を利用した問題

問題 1 － 2 （小学校の問題）

2 つの自然数 108, 420 の最大公約数と
最小公倍数を求めよ。

まず、素因数分解します。

$$108 = 2^2 \times 3^3$$

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

①素因数分解を利用した問題

問題 1 - 2 (小学校の問題)

2つの自然数 108, 420 の最大公約数と
最小公倍数を求めよ。

$$108 = 2^2 \times 3^3$$

$$= 2^2 \times 3 \times 3^2$$

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$= 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

共通する素因数

II

G : 最大公約数

①素因数分解を利用した問題

問題 1 - 2 (小学校の問題)

2つの自然数 108, 420 の最大公約数と
最小公倍数を求めよ。

$$108 = 2^2 \times 3^3$$

$$= 2^2 \times 3 \times 3^2 \quad A$$

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$= 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \quad B$$

L : 最小公倍数 = G × A × B

①素因数分解を利用した問題

問題 1 - 2 (小学校の問題)

2つの自然数 108, 420 の最大公約数と
最小公倍数を求めよ。

$$108 = 2^2 \times 3^3$$

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$\text{最大公約数} = 2^2 \times 3 = 12$$

$$\text{最小公倍数} = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 3780$$

①素因数分解を利用した問題

問題 1

最小公倍数が 2730, 最大公約数が 91 であるような 2 つの自然数のうち,
2 数の差の絶対値が最も小さいものを求めよ。

さあ、この問題に挑戦。

$$\boxed{\text{ある数}} = G \times A$$

$$\boxed{\text{ある数}} = G \times B$$

$$L = G \times A \times B$$

**と、なるはずで
すよね。**

①素因数分解を利用した問題

問題 1

最小公倍数が 2730，最大公約数が 91 であるような 2 つの自然数のうち，
2 数の差の絶対値が最も小さいものを求めよ。

$$L = G \times A \times B$$

$$2730 = 91 \times A \times B \quad \xrightarrow{\text{blue arrow}} \quad A \times B = 30 \quad \swarrow 2730 \div 91 = 30$$

$$(A, B) = (1, 30), (2, 15), (3, 10), (5, 6)$$

$$(6, 5), (10, 3), (15, 2), (30, 1)$$

この中で、2 数の差が小さいのは？

$$(A, B) = (5, 6)$$

①素因数分解を利用した問題

問題 1

最小公倍数が 2730，最大公約数が 91 であるような 2 つの自然数のうち，
2 数の差の絶対値が最も小さいものを求めよ。

$$\boxed{\text{ある数}} = G \times A = 91 \times 5 = 455 \quad \swarrow (A, B) = (5, 6)$$

$$\boxed{\text{ある数}} = G \times B = 91 \times 6 = 546$$

よって，455 と 546

整数の性質

大きく4タイプに取り組みます。

- ①素因数分解を利用した問題
- ②不定方程式
- ③余りに関する問題
- ④N進法

②不定方程式

問題 2

9 で割ると 3 余り, 5 で割ると 4 余る自然数のうち,
4 桁で最小の自然数を求めよ。

**この問題が解けるように
段階を踏んで学びましょう**

②不定方程式

問題 2

9 で割ると 3 余り, 5 で割ると 4 余る自然数のうち,
4 桁で最小の自然数を求めよ。



12, 21, 30, . . .



どう表現すると良いかな?

②不定方程式

問題 2

9 で割ると 3 余り, 5 で割ると 4 余る自然数のうち,
4 桁で最小の自然数を求めよ。

9 で割ると 3 余る数



$$N = 9A + 3$$

求める自然数



12, 21, 30, . . .

$$9 \times 1 + 3$$

$$9 \times 2 + 3$$

$$9 \times 3 + 3$$

②不定方程式

問題 2

9 で割ると 3 余り, 5 で割ると 4 余る自然数のうち,
4 桁で最小の自然数を求めよ。

$$N = 9A + 3$$

$$N = 5B + 4$$

この式について考えてみよう。

$$9A + 3 = 5B + 4 \quad \longrightarrow \quad 9A - 5B = 1$$

②不定方程式

問題 2

9 で割ると 3 余り, 5 で割ると 4 余る自然数のうち,
4 桁で最小の自然数を求めよ。

$$\begin{array}{r} 9A - 5B = 1 \\ -) 9 \times 4 - 5 \times 7 = 1 \\ \hline \end{array}$$

1 になるような数を見つけましょう!

$$9(A - 4) - 5(B - 7) = 0$$

$$9(A - 4) = 5(B - 7)$$

②不定方程式

問題 2

9 で割ると 3 余り, 5 で割ると 4 余る自然数のうち,
4 桁で最小の自然数を求めよ。

9 の倍数	5 の倍数	
$9(A-4)$	$= 5(B-7)$	$A-4$ が 5 の倍数, $B-7$ が 9 の倍数

$A-4=5K, B-7=9K$

②不定方程式

問題 2

9 で割ると 3 余り, 5 で割ると 4 余る自然数のうち,
4 桁で最小の自然数を求めよ。

$$\begin{aligned}
 A-4 &= 5K \\
 A &= 5K+4 \\
 N &= 9A+3 \\
 N &= 9(5K+4)+3 \\
 &= 45K+39
 \end{aligned}$$

$$N = 45K + 39$$

$$45 \times 20 + 39 = 939$$

$$45 \times 21 + 39 = 984$$

$$45 \times 22 + 39 = 1029$$

よって, 1029

整数の性質

大きく4タイプに取り組みます。

- ①素因数分解を利用した問題
- ②不定方程式
- ③余りに関する問題
- ④N進法

③余りに関する問題

余りに関する問題は、
A 余いが何かを求める問題
B 証明問題
が代表的である。

③余りに関する問題

問題 3 A 7^{100} を 5 で割った余りを求めよ。

**この問題が解けるように
段階を踏んで学びましょう**

③余りに関する問題

問題 3 A 7^{100} を 5 で割った余りを求めよ。

**この問題を解くには、
『合同式』について
学ぶ必要があります。**

③余りに関する問題

問題 3 A 7^{100} を 5 で割った余りを求めよ。

『合同式』 ←余りが等しいという関係式

7 を 5 で割った余りと, 2 を 5 で割った余りは同じですね。

それを,

$$7 \equiv 2 \pmod{5}$$

と表します。

③余りに関する問題

問題 3 A 7^{100} を 5 で割った余りを求めよ。

『合同式』 合同式はとても便利な式です。

$7^2 = 49$ 49 を 5 で割った余りは 4 ですね。

$2^2 = 4$ 4 を 5 で割った余りは 4 ですね。

つまり,

$$7^2 \equiv 2^2 \pmod{5}$$

が成立する。同様に,

$$7^3 \equiv 2^3 \pmod{5}$$

$$7^4 \equiv 2^4 \pmod{5} \text{ が成立します。}$$

③余いに関する問題

問題 3 A 7^{100} を 5 で割った余りを求めよ。

そこで, $7^4 \equiv 2^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod{5}$

つまり, $7^4 \equiv 1 \pmod{5}$ となります。

$$(7^4)^{25} \equiv 1^{25} \pmod{5}$$

ここで, $7^{100} = (7^4)^{25}$ であることを利用して,

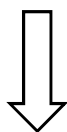
$$7^{100} \equiv (7^4)^{25} \equiv 1^{25} \equiv 1 \pmod{5}$$

1 を 5 で割った余りは 1 だから

7^{100} を 5 で割った余りも 1 となります。

③余いに関する問題

問題 3 A 7^{100} を 5 で割った余りを求めよ。



答え 1

③余りに関する問題

問題 3 B a, b, c を整数とする。このとき、次を示せ。

- (1) a^2 を 3 で割ると余りは 0 または 1 である。
- (2) $a^2 + b^2$ が 3 の倍数ならば、 a, b はともに 3 の倍数である。

**この問題が解けるように
段階を踏んで学びましょう**

③余りに関する問題

問題 3 B a, b, c を整数とする。このとき、次を示せ。

- (1) a^2 を 3 で割ると余りは 0 または 1 である。
- (2) $a^2 + b^2$ が 3 の倍数ならば、 a, b はともに 3 の倍数である。

a が整数のとき、 a を 3 で割ったときの余りは

0, 1, 2 のいずれかですよね。

そこで、(ア) $a = 3n$, (イ) $a = 3n + 1$, (ウ) $a = 3n + 2$

として、それぞれ検証します。

③余いに関する問題

問題 3 B a, b, c を整数とする。このとき、次を示せ。

- (1) a^2 を 3 で割ると余りは 0 または 1 である。
- (2) $a^2 + b^2$ が 3 の倍数ならば、 a, b はともに 3 の倍数である。

- (7) $a = 3n$ のとき、

$$a^2 = (3n)^2 = 9n^2 = 3 \cdot 3n^2$$
 となり、3 で割った余りは 0 である。

③余いに関する問題

問題 3 B a, b, c を整数とする。このとき、次を示せ。

- (1) a^2 を 3 で割ると余りは 0 または 1 である。
- (2) $a^2 + b^2$ が 3 の倍数ならば、 a, b はともに 3 の倍数である。

- (1) $a = 3n + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} a^2 &= (3n + 1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 \\ &= 3 \cdot (3n^2 + 2n) + 1 \end{aligned}$$
 となり、3 で割った余りは 1 である。

③余りに関する問題

問題 3 B a, b, c を整数とする。このとき、次を示せ。

- (1) a^2 を 3 で割ると余りは 0 または 1 である。
- (2) $a^2 + b^2$ が 3 の倍数ならば、 a, b はともに 3 の倍数である。

(ウ) $a = 3n + 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a^2 &= (3n + 2)^2 = 9n^2 + 12n + 4 \\ &= 3 \cdot (3n^2 + 4n + 1) + 1 \end{aligned}$$

となり、3 で割った余りは 1 である。

③余りに関する問題

問題 3 B a, b, c を整数とする。このとき、次を示せ。

- (1) a^2 を 3 で割ると余りは 0 または 1 である。
- (2) $a^2 + b^2$ が 3 の倍数ならば、 a, b はともに 3 の倍数である。

(ア), (イ), (ウ) より、

a^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 である。

(証明終わり)

③余いに関する問題

問題 3 B a, b, c を整数とする。このとき、次を示せ。

- (1) a^2 を 3 で割ると余りは 0 または 1 である。
- (2) $a^2 + b^2$ が 3 の倍数ならば、 a, b はともに 3 の倍数である。

この証明は難しい

$a^2 + b^2$ が 3 の倍数ならば、 a, b はともに 3 の倍数である。

対偶



a, b の少なくとも一方が 3 の倍数でないならば、 $a^2 + b^2$ は 3 の倍数ではない。

これを証明する

③余いに関する問題

問題 3 B a, b, c を整数とする。このとき、次を示せ。

- (1) a^2 を 3 で割ると余りは 0 または 1 である。
- (2) $a^2 + b^2$ が 3 の倍数ならば、 a, b はともに 3 の倍数である。

a, b の少なくとも一方が 3 の倍数でないならば、 $a^2 + b^2$ は 3 の倍数ではない。

- (エ) a, b がともに 3 の倍数でない
- (オ) a が 3 の倍数でない、 b が 3 の倍数である
- (カ) a が 3 の倍数である、 b が 3 の倍数でない

のいずれかである

③余いに関する問題

問題 3 B a, b, c を整数とする。このとき、次を示せ。

- (1) a^2 を 3 で割ると余りは 0 または 1 である。
- (2) $a^2 + b^2$ が 3 の倍数ならば、 a, b はともに 3 の倍数である。

a, b の少なくとも一方が 3 の倍数でないならば、 $a^2 + b^2$ は 3 の倍数ではない。

(エ) a, b がともに 3 の倍数でない



a^2 を 3 で割った余りは 1 である。

b^2 を 3 で割った余りは 1 である。

(1) の結果から



$a^2 + b^2$ を 3 で割った余りは 2 となり
3 の倍数ではない。

③余いに関する問題

問題 3 B a, b, c を整数とする。このとき、次を示せ。

- (1) a^2 を 3 で割ると余りは 0 または 1 である。
- (2) $a^2 + b^2$ が 3 の倍数ならば、 a, b はともに 3 の倍数である。

a, b の少なくとも一方が 3 の倍数でないならば、 $a^2 + b^2$ は 3 の倍数ではない。

(オ) a が 3 の倍数でない、 b が 3 の倍数である



a^2 を 3 で割った余りは 1 である。

b^2 を 3 で割った余りは 0 である。



$a^2 + b^2$ を 3 で割った余りは 1 となり
3 の倍数ではない。

③余いに関する問題

問題 3 B a, b, c を整数とする。このとき、次を示せ。

- (1) a^2 を 3 で割ると余りは 0 または 1 である。
- (2) $a^2 + b^2$ が 3 の倍数ならば、 a, b はともに 3 の倍数である。

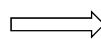
a, b の少なくとも一方が 3 の倍数でないならば、 $a^2 + b^2$ は 3 の倍数ではない。

(カ) a が 3 の倍数である、 b が 3 の倍数でない



a^2 を 3 で割った余りは 0 である。

b^2 を 3 で割った余りは 1 である。



$a^2 + b^2$ を 3 で割った余りは 1 となり

3 の倍数ではない。

③余いに関する問題

問題 3 B a, b, c を整数とする。このとき、次を示せ。

- (1) a^2 を 3 で割ると余りは 0 または 1 である。
- (2) $a^2 + b^2$ が 3 の倍数ならば、 a, b はともに 3 の倍数である。

a, b の少なくとも一方が 3 の倍数でないならば、 $a^2 + b^2$ は 3 の倍数ではない。

(エ), (オ), (カ) より,

a, b の少なくとも一方が 3 の倍数でないならば、 $a^2 + b^2$ は 3 の倍数ではない。



よって、 $a^2 + b^2$ が 3 の倍数ならば、 a, b はともに 3 の倍数である。

(証明終わり)

対偶が真ならば
元の命題も真である

整数の性質

大きく4タイプに取り組みます。

- ①素因数分解を利用した問題
- ②不定方程式
- ③余りに関する問題
- ④N進法

④N進法

問題 4 正の整数 N を 5 進法, 7 進法で表すと, それぞれ 3 桁の数 $abc_{(5)}$, $cab_{(7)}$ になるという。このとき, a , b , c の値を求めよ。また, 正の整数 N を求めよ。

この問題が解けるように
段階を踏んで学びましょう

④N進法

問題 4 正の整数 N を 5 進法, 7 進法で表すと, それぞれ 3 桁の数 $abc_{(5)}$, $cab_{(7)}$ になるという。このとき, a , b , c の値を求めよ。また, 正の整数 N を求めよ。

まず、N進法について学ぶ必要があります

④N進法

問題 4 正の整数 N を 5 進法, 7 進法で表すと, それぞれ 3 桁の数 $abc_{(5)}$, $cab_{(7)}$ になるという。このとき, a , b , c の値を求めよ。また, 正の整数 N を求めよ。

日ごろ使用している数字は, 10 進法です。



10 で位が上がります
(使う数字は 0 ~ 9)

$$\begin{aligned} 724 &= 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 1 \\ &= 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

④N進法

問題 4 正の整数 N を 5 進法, 7 進法で表すと, それぞれ 3 桁の数 $abc_{(5)}$, $cab_{(7)}$ になるという。このとき, a , b , c の値を求めよ。また, 正の整数 N を求めよ。

$$N = abc_{(5)}$$

$$= a \cdot 5^2 + b \cdot 5^1 + c \cdot 5^0$$

$$= 25a + 5b + c \quad \longleftrightarrow \text{①}$$

a は 1 ~ 4

b は 0 ~ 4

c は 0 ~ 4

$$N = cab_{(7)}$$

$$= c \cdot 7^2 + a \cdot 7^1 + b \cdot 7^0$$

$$= 49c + 7a + b$$

a は 0 ~ 6

b は 0 ~ 6

c は 1 ~ 6

$$\longleftrightarrow \text{②}$$

④N進法

問題 4 正の整数 N を 5 進法, 7 進法で表すと, それぞれ 3 桁の数 $abc_{(5)}$, $cab_{(7)}$ になるという。このとき, a , b , c の値を求めよ。また, 正の整数 N を求めよ。

①より, $25a + 5b + c = 49c + 7a + b$

$$18a + 4b - 48c = 0$$

$$4b = 48c - 18a$$

$$2b = 24c - 9a$$

$$2b = 3(8c - 3a)$$

2 の倍数 3 の倍数

2 の倍数と 3 の倍数が等しい



b が 3 の倍数, $8c - 3a$ が 2 の倍数



②より, b は 0 ~ 4 だから

$b = 0$ または $b = 3$

④N進法

問題4 正の整数 N を 5 進法, 7 進法で表すと, それぞれ 3 桁の数 $abc_{(5)}$, $cab_{(7)}$ になるという。このとき, a , b , c の値を求めよ。また, 正の整数 N を求めよ。

$b=0$ のとき,

$$0=3(8c-3a)$$

$$8c-3a=0$$

$$8c=3a$$

②より, a は 1 ~ 4, c は 1 ~ 4

だから, この式を満たす a , c はない。

$b=3$ のとき,

$$6=3(8c-3a)$$

$$8c-3a=2$$

②より, a は 1 ~ 4, c は 1 ~ 4

だから, $a=2$, $c=1$

④N進法

問題4 正の整数 N を 5 進法, 7 進法で表すと, それぞれ 3 桁の数 $abc_{(5)}$, $cab_{(7)}$ になるという。このとき, a , b , c の値を求めよ。また, 正の整数 N を求めよ。

よって,

$$a=2, b=3, c=1$$

また,

$$\begin{aligned} N &= 25a + 5b + c \\ &= 25 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 1 \\ &= 66 \end{aligned}$$

**以上で、『整数の性質』の特別講座を
終了します。整数の性質の分野の問
題は、たくさんのタイプがあってこれで
網羅したわけではありません。
これを機にたくさんの問題に触れてく
ださい。**