

今回の講座の目的は

- ①期待値やゲーム理論の考え方について学ぶ。
- ②数学モデル化の基礎を学ぶ。
- ③実生活の諸問題を数学的に解決する態度を育てる。

①②③の目標を4時間で達成します。
本時は、期待値について学びます。

このテーマの最終到達地点問題を記します。

【最終到達問題】

なかなか結婚できない鈴木さんは、一念発起してお見合いをすることになり、市内にある古ぼけたお見合い相談所に行きました。

お見合い相談所では、お相手を1人だけ紹介してくれ、その方と結婚すれば終了、お断りしたらその人とは二度と会うことができません。

もしお断りしたら、また相談所に行って次の方を紹介してもらいます。

さて、鈴木さんは予算の都合上、お見合いをたくさん行うことはできません。

ある程度の回数で打ち切って、最後のお見合いでは相手がどんな人でも必ず結婚すると決めています。

そんなお金のない鈴木さんができるだけステキな方と結婚するにはどのような戦略で臨めばよいでしょうか？

なお、たいへん勝手ながら、お相手の方は鈴木さんのプロポーズは決して断らないものとします。

この問題を考えるために、『期待値』という考え方を学びましょう。

【期待値講義メモ】 教科書数学B p114参照

問2: 袋の中に赤球3個, 白球2個, 黒球1個が入っている。

この袋から2個の球を同時に取り出す。赤球1個につき1点, 白球1個につき2点, 黒球1個につき3点もらえる。このとき, もらえる合計点の期待値を求めよ。

問1: 2枚の硬貨を同時に投げるとき, 表の出る枚数の期待値を求めよ。

今回の講座の目的は

- ①期待値やゲーム理論の考え方について学ぶ。
- ②数学モデル化の基礎を学ぶ。
- ③実生活の諸問題を数学的に解決する態度を育てる。

①②③の目標を4時間で達成します。今回は、「期待値による最適戦略」を学びます。以下の最終到達問題を解決する一つの糸口になると考えながら、受講しましょう。

このテーマの最終到達地点問題を記します。

【最終到達問題】

なかなか結婚できない鈴木さんは、一念発起してお見合いをすることになり、市内にある古ぼけたお見合い相談所に行きました。お見合い相談所では、お相手を1人だけ紹介してくれ、その方と結婚すれば終了、お断りしたらその人とは二度と会うことができません。もしお断りしたら、また相談所に行って次の方を紹介してもらいます。さて、鈴木さんは予算の都合上、お見合いをたくさん行うことはできません。ある程度の回数で打ち切って、最後のお見合いでは相手がどんな人でも必ず結婚すると決めています。そんなお金のない鈴木さんができるだけステキな方と結婚するにはどのような戦略で臨めばよいのでしょうか？
 なお、たいへん勝手ながら、お相手の方は鈴木さんのプロポーズは決して断らないものとします。

問1：降水確率が何%以上になると、あなたは傘を持っていきますか

現在の答え： _____ %

この問いに対して、最適な解答（最適戦略）をするために『コストロスモデル』を学びます。

コストロスモデルとは、降水確率などのように、予測が完全に的中しない場合に、確率を用いた予測を出すことによって、損する場合と得する場合があるが、長い目で見れば損失を最小限にできるというモデルである。

例：傘を持っていく労力を300円、傘を持たずに濡れることによる損失を1,000円とする。降水確率40%の予報が10回出た場合を考えると、10回のうち4回は雨が降ると考えられるから、
 ■傘を持っていく労力は300円×10=3,000円。損失は0円。
 ■傘を持っていかない労力は0円。損失は1,000円×4=4,000円。
 従って、傘を持っていけば、持っていかない場合に比べて1,000円得であるといえる。

※降水確率の場合、実際には0%から100%までの降水確率について上記のような考え方を適用することにより、労力と損失の合計を最小限になるような予報を出してあるそうです。

次に、以下のようなコストロスモデル表があったとします。このとき、傘を持つほうが得か・傘を持たないときが得かを期待値の計算を活用して求めます。

| | | |
|--------|-----|------|
| 天気→ | 晴れ | 雨 |
| 確率→ | 80% | 20% |
| 傘をもつ | -1点 | 5点 |
| 傘をもたない | 10点 | -20点 |

①傘を持ったときの期待値

②傘を持たないときの期待値

①②の結果より、傘を _____ 方がよい

問2：以下のようなコストロスモデルについて、降水確率が30%のとき、あなたは傘を持っていきますか

| | | |
|--------|-----|------|
| 天気→ | 晴れ | 雨 |
| 確率→ | 70% | 30% |
| 傘をもつ | -5点 | 1点 |
| 傘をもたない | 5点 | -10点 |

それでは、問1に対する最適戦略を、「コストロスモデル」と「期待値」の考え方をを用いて考えましょう。

問1：降水確率が何%以上になると、あなたは傘を持っていきますか

Step1：コストロスモデルを作成します。

※この表は、人によって違います。

| 天気→ | 晴れ | 雨 |
|--------|------|------|
| 傘をもつ | ()点 | ()点 |
| 傘をもたない | ()点 | ()点 |

Step2：Step1で作成したコストロスモデルにおいて、降水確率が40%のとき、傘を持っていくかどうか判定してみます。

Step3：Step2を参考に、Step1で作成したコストロスモデルにおいて、降水確率が何%以上のときに傘を持っていくかに、降水確率を p とし求めましょう。

さて、結果はいかがでしたか？

「臆病者（降水確率は低いけど傘を持っていこう、ブルブル）」だったり、「楽道家（降水確率が高くても気にしないぜ♪アハハ）」だったりしますよね。

さて、あるテレビ番組の調査では「降水確率何%ならば傘を持ちますか」という質問に対して、気象予報士にアンケートをとった結果、「降水確率40%ならば傘を持つ」という結果が出ました。



あなたが40%で傘をもたないのであれば、ちょっと意識改革が必要なのではないでしょうか。そこで、本日の最終問題に挑戦してみましょう。

問3：「降水確率40%で傘を持つ人」になるように、問1で作成したコストロスモデルの1カ所の数値を変更しましょう。
※つまり、意識改革を行いましょう。

【改訂版コストロスモデル】※意識改革

| 天気→ | 晴れ | 雨 |
|--------|------|------|
| 傘をもつ | ()点 | ()点 |
| 傘をもたない | ()点 | ()点 |

今回は確率が分かっている敵（＝天気）と戦うときの戦略でしたが、今回は確率が分からない敵（意志を持った人）と戦います。それをゲーム理論といいます。これを次回学びます。

今回の講座の目的は

- ①期待値やゲーム理論の考え方について学ぶ。
- ②数学モデル化の基礎を学ぶ。
- ③実生活の諸問題を数学的に解決する態度を育てる。

①②③の目標を4時間で達成します。今回は、「ゲーム理論」を学びます。以下の最終到達問題を解決する一つの糸口になると考えながら、受講しましょう。

このテーマの最終到達地点問題を記します。

【最終到達問題】

なかなか結婚できない鈴木さんは、一念発起してお見合いをすることになり、市内にある古ぼけたお見合い相談所に行きました。お見合い相談所では、お相手を1人だけ紹介してくれ、その方と結婚すれば終了、お断りしたらその人とは二度と会うことができません。もしお断りしたら、また相談所に行って次の方を紹介してもらいます。さて、鈴木さんは予算の都合上、お見合いをたくさん行うことはできません。ある程度回数で打ち切って、最後のお見合いでは相手がどんな人でも必ず結婚すると決めています。そんなお金のない鈴木さんができるだけステキな方と結婚するにはどのような戦略で臨めばよいのでしょうか？
なお、たいへん勝手ながら、お相手の方は鈴木さんのプロポーズは決して断らないものとします。

前回の最適戦略の相手は降水確率でしたが、今回はの相手は「意思を持った人間」です。相手が意思を持っているときに、どうすれば勝てるかどうかを考察します。

問1: 次のようなゲームを行うとき、AとBどちらかに有利・不利があるかを、実際にゲームを行い答えよ。ただし、平等という考察も可とする。

<ゲームのルール>

- ・A Bの2人にそれぞれ2枚ずつトランプを配る。
A: ♠7, ◇8
B: ◇3, ♠7
- ①互いのトランプは知っているとする。
- ②2人同時に2枚の中から1枚を選んで出す。
- ③同色の場合、大きい数字を出した方が数字の差の得点もらう。
- ④違う色の場合、小さい数字を出した方が数字の差の得点もらう。
- ⑤5回勝負を行い、総合得点の多い方を勝ちとする。

| | | | | | | |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| | 1回目 | 2回目 | 3回目 | 4回目 | 5回目 | 合計 |
| A: ♠7 ◇8 | | | | | | |
| B: ◇3 ♠7 | | | | | | |
| 得点 | | | | | | |

【解答】

それでは、次のStepにそって、数学的に考察していきます。

Step1: 利得表を作成する。※コストロスモデルと似ています。

| | | |
|-------|----|----|
| A \ B | ◇3 | ♠7 |
| ♠7 | | |
| ◇8 | | |

Step2: 最適反応戦略を検討する。

□Aの立場で考えると

- Bが ◇3 を選んだら、Aは _____ を選ぶ
- Bが ♠7 を選んだら、Aは _____ を選ぶ

□Bの立場で考えると

- Aが ♠7 を選んだら、Bは _____ を選ぶ
- Aが ◇8 を選んだら、Bは _____ を選ぶ

Step3: トランプを出す確率を決定する。

| | | | |
|-------|----|-------|-------|
| A \ B | | ◇3 | ♠7 |
| | 確率 | | |
| ♠7 | | -4, 4 | 0, 0 |
| ◇8 | | 5, -5 | -1, 1 |

- もし、Aが ♠7 を $\frac{1}{2}$, ◇8 を $\frac{1}{2}$ の確率で、
- Bが ◇3 を $\frac{1}{3}$, ♠7 を $\frac{2}{3}$ の確率で出すとする。

Step4: A の利得の期待値を出す。

結論: Step3で決めた確率でトランプを出すとき、

_____の方が有利であるといえる。

問2: Bが◇3を $\frac{1}{3}$, ♠7を $\frac{2}{3}$ の確率で出すとき、Aが勝つための戦略を、Aが♠7を出す確率を p として考察せよ。

| | | | |
|-------|----|-------|-------|
| A \ B | | ◇3 | ♠7 |
| | 確率 | | |
| ♠7 | | -4, 4 | 0, 0 |
| ◇8 | | 5, -5 | -1, 1 |

【解答】

問3 : Aが♠7を p , ◇8を $1-p$ の確率で, Bが ◇3を q , ♠7を $1-q$ の確率で出すとする。このとき, AとBそれぞれの最適戦略を考察せよ。

| | | | |
|-------|----|-------|-------|
| A \ B | | ◇3 | ♠7 |
| | 確率 | | |
| ♠7 | | -4, 4 | 0, 0 |
| ◇8 | | 5, -5 | -1, 1 |

Step1 : A の利得の期待値を出す。

Step2 : B の利得の期待値を出す。

Step3 : Step1で求めたAの利得の期待値において, p を変数と考え, q に対しての期待値が最大になるようにすることで, Aの最適反応戦略を考察する。

【Step3の結論】

Step4 : Step2で求めたBの利得の期待値において, p を変数と考え, q に対しての期待値が最大になるようにすることで, Aの最適反応戦略を考察する。

【Step4の結論】

【今回のゲームの結論をまとめよう】

今回の講座の目的は

- ①期待値やゲーム理論の考え方について学ぶ。
- ②数学モデル化の基礎を学ぶ。
- ③実生活の諸問題を数学的に解決する態度を育てる。

①②③の目標を4時間で達成します。今回は、今までの講義で学んだことを活用しながら「お見合い問題」を解決します。

【最終到達問題】

なかなか結婚できない鈴木さんは、一念発起してお見合いをすることになり、市内にある古ぼけたお見合い相談所に行きました。

お見合い相談所では、お相手を1人だけ紹介してくれ、その方と結婚すれば終了、お断りしたらその人とは二度と会うことができません。もしお断りしたら、また相談所に行って次の方を紹介してもらいます。

さて、鈴木さんは予算の都合上、お見合いをたくさん行うことはできません。ある程度の回数で打ち切って、最後のお見合いでは相手がどんな人でも必ず結婚すると決めています。そんなお金のない鈴木さんができるだけステキな方と結婚するにはどのような戦略で臨めばよいでしょうか？

なお、たいへん勝手ながら、お相手の方は鈴木さんのプロポーズは決して断らないものとします。

このままでは解けませんので、これを数学の問題に変えましょう。

- ① n 人(今回は5人)の人とお見合いをする。
- ② お見合いしたときにすぐ交際するかしないか決めないといけない。
- ③ 交際を申し込んだら相手は必ずOKする。
- ④ 交際を申し込んだら終了。
他の人には交際を申し込めない。
一回断った人とは二度と交際できない。
- ⑤ 5人目の人には必ず交際を申し込む
- ⑥ 5人目の人の順位は、1位、2位、3位、4位、5位とランク付けされるが、最終順位が確定するのは最後の5人目まで待つ必要がある。

【あなたの戦略は】

1人目は

2人目は

3人目は

4人目は

5人目は、涙をのんで、誰が来ても交際しましょう。

この戦略で、本当にいいのか、今回は班で意見を戦わせて、班でまとめた戦略で勝負しましょう。班で期待値を出した後に、自分でさらに研究するのはOKです。

【班の戦略は】

1人目は

2人目は

3人目は

4人目は

5人目は、涙をのんで、誰が来ても交際しましょう。

【今回のテーマで分かったこと・感想など】

- ①期待値の考え方
 - ②コストロスモデルによる、降水確率と傘を持つ持たないの考察
 - ③トランプゲームにおける、ゲームに勝つ戦略の研究
 - ④お見合い問題における、最適停止問題の考察
- など、一連の期待値関係のテーマについて、感想などをかいてください。

